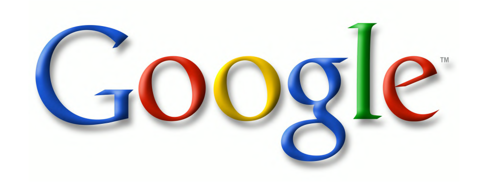
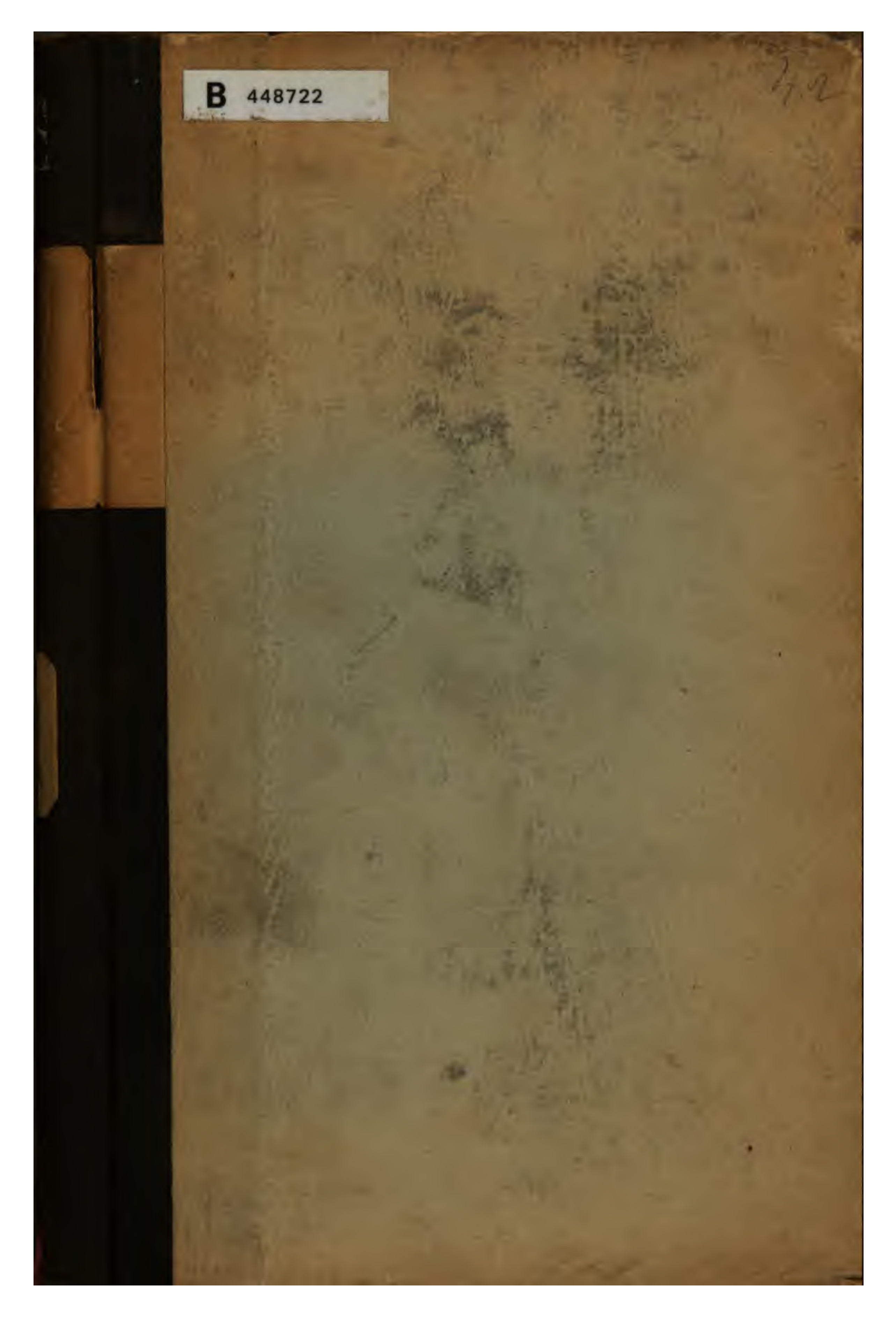
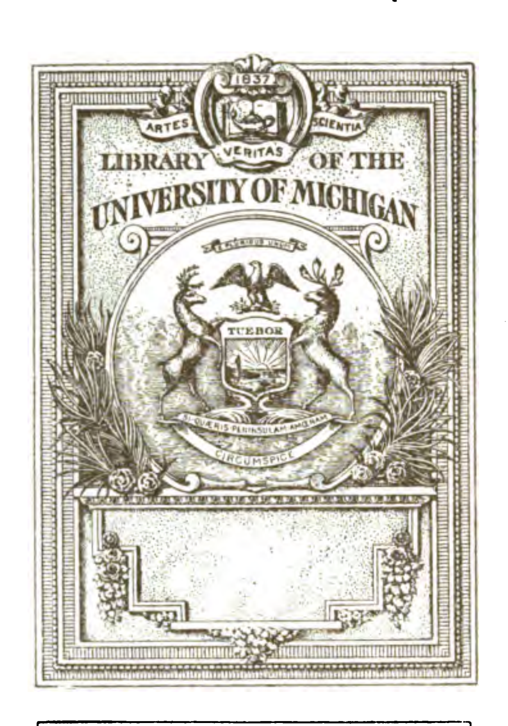
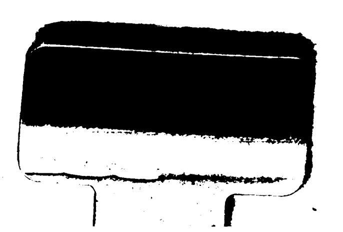



B 448722
42


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE



A Monsieur J. Bertrand
Membre de l'Institut
Hommage de son ancien élève
Graindorge

INTÉGRATION

DES

ÉQUATIONS DE LA MÉCANIQUE.

(Extrait des *Mémoires de la Société royale des sciences de Liège,*
2e série, t. XVI.)

INTÉGRATION

DES

ÉQUATIONS DE LA MÉCANIQUE

PAR

J. GRAINDORGE,

DOCTEUR SPÉCIAL EN SCIENCES PHYSICO-MATHÉMATIQUES,
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE.

LIÈGE,
Librairie Ch. Aug. Desoer.

BRUXELLES,
F. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES,
DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE
Rue de Louvain, 108

1889

Prof. Alex. Ziwet
gt.
3-28-1923

Stäckel

TABLE DES MATIÈRES.

INTRODUCTION.

Le but que je me suis proposé dans ce travail est de présenter un ensemble des recherches les plus importantes sur l'intégration des équations de la Mécanique. Ces travaux qui sont dus à Lagrange, Poisson, Hamilton, Jacobi, Donkin, Bertrand, Liouville, etc., sont disséminés dans diverses revues périodiques. J'en ai déjà fait connaître quelques-uns dans un Mémoire publié en 1871 : j'aurai l'occasion de reproduire ici une partie de ce Mémoire en lui donnant plus de développements.

Aucun ouvrage n'a encore été publié jusqu'ici sur cette matière. Cependant ces théories ont pris une telle extension qu'il est nécessaire pour ceux qui désirent les étudier et les approfondir d'avoir un guide qui les dispense de faire un nombre considérable de recherches. Aussi, j'espère que le travail actuel pourra rendre quelques services.

INTÉGRATION

DES

ÉQUATIONS DE LA MÉCANIQUE.

I.

Formules de Lagrange. — Équations canoniques.

1. On sait qu'en appliquant le théorème de d'Alembert au mouvement d'un système matériel, on obtient l'équation :

$$\sum m_i\left(\frac{d^2x_i}{dt^2}\,\delta x_i + \frac{d^2y_i}{dt^2}\,\delta y_i + \frac{d^2z_i}{dt^2}\,\delta z_i\right) = \sum(X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i),$$

en désignant par m_i la masse d'un point du système, x_i, y_i, z_i les coordonnées de ce point à la fin du temps t, X_i, Y_i, Z_i les composantes de la force P_i qui agit sur ce point, δx_i, δy_i, δz_i les projections sur les axes du déplacement virtuel $\delta\sigma_i$ de ce point. Les déplacements δx_i, δy_i, δz_i doivent être *compatibles* avec les liaisons du système *à l'instant considéré.*

C'est l'équation générale de la dynamique : on l'appelle *l'équation de Lagrange.*

2. Dans le cas où il existe une *fonction de force* U, c'est-à-dire une fonction telle que l'on ait :

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i},\quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i},\quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

il vient :

$$\sum(X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i) = \sum\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\,\delta x_i + \frac{\partial U}{\partial y_i}\,\delta y_i + \frac{\partial U}{\partial z_i}\,\delta z_i\right) = \delta U,$$

et l'équation de Lagrange devient alors :

$$\sum m_i \left(\frac{d^2x_i}{dt^2} \delta x_i + \frac{d^2y_i}{dt^2} \delta y_i + \frac{d^2z_i}{dt^2} \delta z_i \right) = \delta U.$$

3. Il est évident que, même dans le cas où il n'y a pas de fonction de force, on peut toujours écrire l'équation de Lagrange sous la forme symbolique :

$$\sum m_i \left(\frac{d^2x_i}{dt^2} \delta x_i + \frac{d^2y_i}{dt^2} \delta y_i + \frac{d^2z_i}{dt^2} \delta z_i \right) = \delta U, \qquad (1)$$

mais il faut bien observer que dans cette équation, U n'a de signification que si la fonction de force existe, c'est-à-dire si

$$\sum (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i)$$

est une différentielle exacte d'une fonction U. Dans le cas général où il n'existe pas de fonction de force, δU sera une notation abrégée employée pour représenter l'expression

$$\sum (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i);$$

en d'autres termes, dans ce cas, U seul ne représentera rien.

4. L'équation (1) a été obtenue en supposant le système rapporté à des coordonnées rectangulaires. Supposons maintenant qu'aux coordonnées x_i, y_i, z_i, on substitue d'autres variables $q_1, q_2, \ldots q_k$, liées à x_i, y_i, z_i d'une manière quelconque, mais de telle sorte cependant que l'on puisse toujours exprimer x_i, y_i, z_i en fonction de $q_1, q_2, \ldots q_k$: les variables $q_1, q_2, \ldots q_k$, ne sont pas nécessairement au nombre de $3n$, comme les coordonnées x_i, y_i, z_i. Il est même préférable, dans la plupart des cas, de prendre le nombre $k < 3n$, de telle manière que, par le choix même de ces variables nouvelles, les équations de condition soient satisfaites d'elles-mêmes.

Ainsi, par exemple, supposons un point assujetti à demeurer sur une sphère :

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2;$$

on pourra choisir deux variables nouvelles q_1, q_2, définies par les équations

$$x = r \sin q_1 \cos q_2,$$

$$y = r \sin q_1 \cos q_2,$$

$$z = r \sin q_2,$$

et il est évident que, par ce choix de deux nouvelles variables, la liaison sera satisfaite d'elle-même.

Ainsi encore, dans le cas d'un point assujetti à demeurer sur l'ellipsoïde :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

si l'on pose :

$$x = a \sin q_1 \cos q_2,$$

$$y = b \sin q_1 \cos q_2,$$

$$z = c \sin q_2,$$

la liaison sera satisfaite d'elle-même.

En général, si l'on a m équations de liaisons, les $3n$ coordonnées peuvent être exprimées au moyen de $3n - m$ d'entre elles, ou au moyen de $3n - m$ variables nouvelles.

Si nous désignons par $q_1, q_2, \dots q_k$, ces $3n - m = k$ nouvelles quantités, elles doivent être telles que si l'on exprime x_i, y_i, z_i au moyen de ces quantités, et si l'on substitue les valeurs des x_i, y_i, z_i ainsi obtenues dans les équations de condition :

$$L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \dots \quad L_m = 0,$$

les premiers membres de ces équations s'annulent identiquement, c'est-à-dire que l'on aura identiquement :

$$L_1(q_1, q_2, \dots q_k) = 0, \quad \dots \quad L_m(q_1, q_2, \dots q_k) = 0,$$

sans qu'il existe aucune relation entre les variables q.

5. Cela posé, substituons aux variables x_i, y_i, z_i les k variables nouvelles q_1, $q_2, \dots q_k$ (le nombre k étant pour le moment

tout à fait quelconque), liées aux premières par des équations telles que

$$x_i = \varphi(t\,;\, q_1, q_2, \ldots q_k);$$

nous aurons, en désignant par x'_i, q'_1, q'_2, ... q'_k, les dérivées de x_i, q_1, q_2, ... q_k par rapport à t :

$$x'_i = \psi(t, q_1, q_2, \ldots q_k, q'_1, q'_2, \ldots q'_k).$$

6. Avant de faire la substitution, nous allons d'abord transformer l'équation (1).

A cet effet, posons :

$$\begin{aligned} \mathrm{T} &= \sum m_i \left\{\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right\} \\ &= \frac{1}{2}\sum m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2); \end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x'_i} = m_i x'_i, \quad \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y'_i} = m_i y'_i, \quad \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z'_i} = m_i z'_i,$$

et, par suite,

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = m_i \frac{dx'_i}{dt} = \frac{d\,.\,\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x'_i}}{dt}, \text{ etc.}$$

L'équation (1) devient alors :

$$\sum \left[\frac{d\,.\,\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x'_i}}{dt}\delta x_i + \frac{d\,.\,\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y'_i}}{dt}\delta y_i + \frac{d\,.\,\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z'_i}}{dt}\delta z_i\right] = \delta \mathrm{U}. \qquad (2)$$

On peut mettre le premier membre de cette équation sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\sum\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x'_i}\delta x_i + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y'_i}\delta y_i + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z'_i}\delta z_i\right) \\ &- \sum\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x'_i}\frac{d\,.\,\delta x_i}{dt} + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y'_i}\frac{d\,.\,\delta y_i}{dt} + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z'_i}\frac{d\,.\,\delta z_i}{dt}\right) \\ &= \frac{d}{dt}\sum\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x'_i}\delta x_i + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y'_i}\delta y_i + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z'_i}\delta z_i\right) \\ &- \sum\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x'_i}\delta x'_i + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y'_i}\delta y'_i + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z'_i}\delta z'_i\right). \end{aligned}$$

Or, de la formule

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2),$$

il résulte que T est une fonction des x_i', y_i', z_i'; on a donc :

$$\delta T = \sum \left(\frac{\partial T}{\partial x_i'}\delta x_i' + \frac{\partial T}{\partial y_i'}\delta y_i' + \frac{\partial T}{\partial z_i'}\delta z_i'\right),$$

et, par suite, l'équation (2) devient :

$$\frac{d}{dt}\sum\left(\frac{\partial T}{\partial x_i'}\delta x_i + \frac{\partial T}{\partial y_i'}\delta y_i + \frac{\partial T}{\partial z_i'}\delta z_i\right) - \delta T = \delta U. \qquad (3)$$

7. Cette équation (3) n'est qu'une transformée de l'équation (1) toujours en coordonnées rectangulaires. Nous allons maintenant introduire les variables q, et chercher séparément ce que deviennent les trois termes de l'équation (3) lorsque l'on remplace les x_i, y_i, z_i par les q.

Or, T est une fonction de x_i', y_i', z_i'; mais, x_i, y_i, z_i étant des fonctions de t, $q_1, \ldots q_k$, il en résulte que x_i', y_i', z_i' sont des fonctions de t, $q_1, \ldots q_k$, $q_1', \ldots q_k'$, données par les formules

$$\left.\begin{aligned} x_i' &= \frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum \frac{\partial x_i}{\partial q_s} q_s', \\ y_i' &= \frac{\partial y_i}{\partial t} + \sum \frac{\partial y_i}{\partial q_s} q_s', \\ z_i' &= \frac{\partial z_i}{\partial t} + \sum \frac{\partial z_i}{\partial q_s} q_s'; \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

par conséquent, T sera une fonction de $q_1', \ldots q_k'$, $q_1, \ldots q_k$, et nous aurons :

$$\delta T = \sum \frac{\partial T}{\partial q_s}\delta q_s + \sum \frac{\partial T}{\partial q_s'}\delta q_s'.$$

D'autre part, on a :

$$\delta x_i = \sum \frac{\partial x_i}{\partial q_s}\delta q_s, \quad \delta y_i = \sum \frac{\partial y_i}{\partial q_s}\delta q_s, \quad \delta z_i = \sum \frac{\partial z_i}{\partial q_s}\delta q_s \text{ (*)}, \qquad (5)$$

(*) On ne doit pas, dans ces formules, tenir compte du terme en δt,

et, par suite,

$$\sum\left(\frac{\partial T}{\partial x'_i}\delta x_i + \frac{\partial T}{\partial y'_i}\delta y_i + \frac{\partial T}{\partial z'_i}\delta z_i\right)$$

$$= \sum_i\sum_s\left(\frac{\partial T}{\partial x'_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{\partial T}{\partial y'_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{\partial T}{\partial z'_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right)\delta q_s.$$

D'ailleurs, des équations (4) on tire :

$$\frac{\partial x'_i}{\partial q'_s} = \frac{\partial x_i}{\partial q_s}, \quad \frac{\partial y'_i}{\partial q'_s} = \frac{\partial y_i}{\partial q_s}, \quad \frac{\partial z'_i}{\partial q'_s} = \frac{\partial z_i}{\partial q_s};$$

d'où :

$$\sum\left(\frac{\partial T}{\partial x'_i}\delta x_i + \frac{\partial T}{\partial y'_i}\delta y_i + \frac{\partial T}{\partial z'_i}\delta z_i\right)$$

$$= \sum_i\sum_s\left(\frac{\partial T}{\partial x'_i}\frac{\partial x'_i}{\partial q'_s} + \frac{\partial T}{\partial y'_i}\frac{\partial y'_i}{\partial q'_s} + \frac{\partial T}{\partial z'_i}\frac{\partial z'_i}{\partial q'_s}\right)\delta q_s = \sum_s \frac{\partial T}{\partial q'_s}\delta q_s.$$

Mais on a aussi, en général, en remplaçant x_i, y_i, z_i par leurs valeurs en fonction de $q_1, \ldots q_k$, et les $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ par les valeurs (5) :

$$\delta U = \sum (X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i)$$

$$= \sum_i\sum_s\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_s} + Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_s} + Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right) = \sum_s Q_s\delta q_s,$$

en posant :

$$Q_s = \sum_i\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_s} + Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_s} + Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right).$$

L'équation (3) devient alors :

$$\frac{d}{dt}\sum\frac{\partial T}{\partial q'_s}\delta q_s - \sum\frac{\partial T}{\partial q_s}\delta q_s - \sum\frac{\partial T}{\partial q'_s}\delta q'_s = \sum Q_s\delta q_s. \qquad (6)$$

Mais, on a :

$$\frac{d}{dt}\sum\frac{\partial T}{\partial q'_s}\delta q_s = \sum\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_s}\delta q_s\right) = \sum\frac{d.\frac{\partial T}{\partial q'_s}}{dt}\delta q_s + \sum\frac{\partial T}{\partial q'_s}\delta q'_s,$$

puisque t doit rester constant dans les différentiations relatives à la caractéristique δ, les déplacements étant compatibles avec les liaisons.

et l'équation (6) peut être mise sous la forme suivante :

$$\sum \frac{d.\frac{\partial T}{\partial q'_s}}{dt}\delta q_s - \sum \frac{\partial T}{\partial q_s}\delta q_s = \sum Q_s\delta q_s,$$

où bien :

$$\sum \left(\frac{d.\frac{\partial T}{\partial q'_s}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_s} - Q_s \right) \delta q_s = 0. \qquad (7)$$

8. Jusqu'ici nous n'avons fait aucune hypothèse sur les variables q, que nous avons supposées en nombre quelconque. Supposons maintenant que les variations δq soient arbitraires, ce qui arrivera lorsqu'il n'existe pas de relations entre les variables q, c'est-à-dire lorsque le nombre k sera le plus petit possible ($k = 3n - m$); les coefficients de ces variations seront nuls séparément, et l'équation (7) se décomposera en k équations de la forme

$$\frac{d.\frac{\partial T}{\partial q'_s}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_s} - Q_s = 0 \text{ (*)}, \qquad (8)$$

s pouvant avoir les valeurs 1, 2, ... k.

Si, au contraire, il existe des relations entre les variables q, c'est-à-dire si $k > 3n - m$, ces liaisons seront exprimées par des équations de condition. On fera alors usage de l'équation (7), et l'on traitera la question de la même manière que dans le cas des variables x_i, y_i, z_i; par exemple, on emploiera la *méthode des multiplicateurs*.

Les formules (7) et (8) sont dues à Lagrange.

(*) M. Bertrand a donné une autre démonstration de ces formules (*Mécanique analytique de Lagrange*, t. I, p. 409). Voir aussi la démonstration de Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*, pp. 64 et 65.

9. Lorsqu'il existe une fonction de force U, en y introduisant les variables $q_1, \dots q_k$, on a :

$$\delta U = \sum \frac{\partial U}{\partial q_s} \delta q_s ;$$

l'équation (7) devient alors :

$$\sum \left(\frac{d \cdot \frac{\partial T}{\partial q'_s}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_s} - \frac{\partial U}{\partial q_s} \right) \delta q_s = 0,$$

et les équations (8) nous donnent :

$$\frac{d \cdot \frac{\partial T}{\partial q'_s}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_s} - \frac{\partial U}{\partial q_s} = 0. \qquad (9)$$

10. Les équations (9) qui ont lieu seulement dans le cas où il existe une fonction de force, sont du second ordre. Elles ne sont pas faciles à intégrer dans la plupart des cas; mais on peut les simplifier, en introduisant de nouvelles variables. A cet effet, on fait usage d'une transformation imaginée par Poisson et par Hamilton, ce qui réduira les équations à d'autres ne contenant que des dérivées du premier ordre, mais dont le nombre sera double.

Pour effectuer la transformation, nous supposerons que *les liaisons sont indépendantes du temps*, de sorte que les variables x_i, y_i, z_i s'expriment en fonction des q, au moyen d'équations ne renfermant pas explicitement le temps t.

Nous aurons ainsi :

$$x'_i = \sum \frac{\partial x_i}{\partial q_s} q'_s, \quad y'_i = \sum \frac{\partial y_i}{\partial q_s} q'_s, \quad z'_i = \sum \frac{\partial z_i}{\partial q_s} . q'_s ;$$

par conséquent, x'_i, y'_i, z'_i sont des fonctions homogènes et du premier degré de $q'_1, q'_2, \dots q'_k$. Mais alors il est évident que la fonction

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i (x'^2_i + y'^2_i + z'^2_i),$$

sera une fonction homogène et du second degré de $q'_1, q'_2, \ldots q'_k$, dont les coefficients seront des fonctions connues de $q_1, q_2, \ldots q_k$.

Cela établi, posons avec Poisson :

$$\frac{\partial T}{\partial q'_s} = p_s, \tag{10}$$

et nous aurons, au lieu de l'équation (9), les deux équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_s}{dt} &= \frac{\partial(T + U)}{\partial q_s}, \\ \frac{\partial T}{\partial q'_s} &= p_s. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Mais ce n'est pas la forme définitive des équations du mouvement : les équations (11) subiront encore une autre transformation que nous ferons connaître plus loin.

11. *Remarque.* — Nous pouvons cependant déjà déduire des équations (11) un résultat remarquable (*) :

PROPRIÉTÉ. — *Si l'on peut choisir les variables* q *de telle manière que l'une des variables* q_s *n'entre pas dans la fonction de force* U, *et si, en outre, la fonction* T *ne renferme pas la variable* q_s *elle-même, mais sa dérivée* q'_s, *il en résultera une intégrale du système d'équations différentielles* (11).

Cette intégrale sera :

$$p_s = const., \qquad \text{ou :} \qquad \frac{\partial T}{\partial q'_s} = const.$$

En effet, puisque, par hypothèse, T et U ne renferment pas la variable q_s, on a :

$$\frac{\partial(T + U)}{\partial q_s} = 0;$$

par suite,

$$\frac{dp_s}{dt} = 0, \qquad \text{ou bien :} \qquad p_s = const.$$

(*) JACOBI, *Vorlesungen über Dynamik*, p. 66.

12. Ce cas se présente dans le problème du *mouvement d'un point matériel attiré vers un centre fixe.*

En effet, si le centre est pris pour origine, on a les formules

$$x = r \cos \varphi \sin \theta,$$

$$y = r \sin \varphi \sin \theta,$$

$$z = r \cos \theta,$$

en désignant par r le rayon vecteur, θ l'angle qu'il fait avec l'axe des z, et φ l'angle que sa projection sur le plan des xy fait avec l'axe des x.

Si l'on pose, pour abréger :

$$r' = \frac{dr}{dt}, \quad \theta' = \frac{d\theta}{dt}, \quad \varphi' = \frac{d\varphi}{dt},$$

on aura, puisqu'il ne s'agit que d'un seul point matériel :

$$T = \frac{1}{2} m(x'^2 + y'^2 + z'^2) = \frac{1}{2} m(r'^2 + r^2\theta'^2 + r^2 \sin^2 \theta \,.\, \varphi'^2).$$

Comme on le voit, la fonction T ne renferme pas la variable φ, mais elle renferme sa dérivée φ'.

D'autre part, la fonction de force étant :

$$U = \frac{\mu}{r},$$

elle ne renferme pas la variable φ.

On a donc :

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = mr^2 \sin^2 \theta \,.\, \varphi' = const.,$$

ou bien, en faisant entrer le facteur m dans la constante, l'équation

$$r^2 \sin^2 \theta \,.\, \varphi' = const.,$$

sera une intégrale du problème.

Or, il est facile de s'assurer que cette équation n'est autre que

l'intégrale des aires dans le plan des xy. En effet, des formules :

$$x = r\cos\varphi\sin\theta,$$
$$y = r\sin\varphi\sin\theta,$$

on tire :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x},$$

d'où :

$$\frac{\varphi'}{\cos^2\varphi} = \frac{xy' - yx'}{x^2} = \frac{xy' - yx'}{r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi},$$

ou bien :

$$\varphi' = \frac{xy' - yx'}{r^2\sin^2\theta};$$

par conséquent, l'équation

$$r^2\sin^2\theta.\varphi' = const.,$$

est équivalente à l'équation

$$xy' - yx' = const.,$$

ce qui est l'intégrale des aires dans le plan des xy.

12. Reprenons maintenant les équations (11):

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_s}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial q_s} + \frac{\partial U}{\partial q_s}, \\ p_s &= \frac{\partial T}{\partial q'_s}. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Dans la première de ces équations les variables indépendantes sont les q et les q'; proposons-nous de la transformer en prenant pour variables nouvelles les q et les p.

La fonction T étant une fonction homogène du second degré des q', dont les coefficients dépendent des q, il résulte de la seconde des équations (11) que les p sont des fonctions homogènes et linéaires des q'.

En vertu de la définition des p, on aura donc k équations de la forme

$$p_i = \varpi_i,$$

ϖ_i étant une fonction linéaire de $q'_1, \ldots q'_k$.

Si l'on résout ces équations par rapport à $q'_1, q'_2, \dots q'_k$, on obtient k équations de la forme

$$q'_i = K_i,$$

K_i étant une fonction linéaire de $p_1, p_2, \dots p_k$, dont les coefficients dépendent des q.

Observons que, par le changement de variables, $\frac{\partial U}{\partial q_s}$ ne change pas, puisque U, qui renferme seulement $q_1, q_2, \dots q_k$, est indépendant de $q'_1, q'_2, \dots q'_k$, et, par suite de $p_1, p_2, \dots p_k$. Au contraire $\frac{\partial T}{\partial q_s}$ changera. En effet, T est une fonction de $q_1, q_2, \dots q_k$, $q'_1, q'_2, \dots q'_k$, et par rapport à ces dernières, T est homogène et du second degré; si, au lieu des q', nous introduisons les p, au moyen des équations linéaires $q'_i = K_i$, T deviendra une fonction de $q_1, \dots q_k, p_1, \dots p_k$; elle sera homogène et du second degré par rapport aux p, et elle aura changé relativement aux q, puisque les coefficients des K_i, que nous introduisons à la place des q', renferment des q.

Par conséquent, si l'on prend la dérivée partielle de T par rapport à q_s dans la nouvelle hypothèse, cette dérivée ne sera pas la même que dans la première hypothèse.

Pour distinguer, nous désignerons par $\left(\frac{\partial T}{\partial p_s}\right), \left(\frac{\partial T}{\partial q_s}\right)$ les quotients différentiels de T, considérée comme fonction de $q_1, \dots q_k, p_1, \dots p_k$, et par $\frac{\partial T}{\partial q_s}$, comme ci-dessus, les quotients différentiels de T, considérée comme fonction de $q_1, q_2, \dots q_k, q'_1, q'_2, \dots q'_k$; il résulte de ce que nous venons de dire que $\frac{\partial T}{\partial q_s}$ et $\left(\frac{\partial T}{\partial q_s}\right)$ auront des valeurs différentes.

Proposons-nous maintenant de trouver par quoi l'on doit remplacer $\frac{\partial T}{\partial q_s}$ dans les formules (11), lorsque T deviendra fonction de $p_1, \dots p_k, q_1, \dots q_k$.

Nous avons, en vertu du théorème des fonctions homogènes :

$$2T = \frac{\partial T}{\partial q'_1} q'_1 + \frac{\partial T}{\partial q'_2} q'_2 + \dots + \frac{\partial T}{\partial q'_k} q'_k \ (*),$$

(*) Dans cette formule et dans les suivantes, T est considéré comme fonction des q et des q'.

ou bien :

$$2T = p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + \cdots + p_k q'_k,$$

formule que l'on peut écrire sous la forme suivante :

$$T = p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + \cdots + p_k q'_k - T.$$

Prenant la différentielle totale des deux membres, on a :

$$\begin{aligned} dT = & \, p_1 dq'_1 + p_2 dq'_2 + \cdots + p_k dq'_k \\ & + q'_1 dp_1 + q'_2 dp_2 + \cdots + q'_k dq_k \\ & - \frac{\partial T}{\partial q_1} dq_1 - \frac{\partial T}{\partial q_2} dq_2 - \cdots - \frac{\partial T}{\partial q_k} dq_k \\ & - \frac{\partial T}{\partial q'_1} dq'_1 - \frac{\partial T}{\partial q'_2} dq'_2 - \cdots - \frac{\partial T}{\partial q'_k} dq'_k, \end{aligned}$$

ou bien, en réduisant en vertu de la deuxième équation (11):

$$\begin{aligned} dT = & \, q'_1 dp_1 + q'_2 dp_2 + \cdots + q'_k dp_k \\ & - \frac{\partial T}{\partial q_1} dq_1 - \frac{\partial T}{\partial q_2} dq_2 - \cdots - \frac{\partial T}{\partial q_k} dq_k \\ = & \sum q'_s dp_s - \sum \frac{\partial T}{\partial q_s} dq_s, \end{aligned}$$

T étant toujours considéré comme une fonction des q et des q'. Mais, si nous introduisons dans T, au lieu des q', les quantités p, au moyen des équations

$$q'_i = K_i,$$

T devient une fonction des p et des q, et l'on a :

$$dT = \sum \left(\frac{\partial T}{\partial p_s}\right) dp_s + \sum \left(\frac{\partial T}{\partial q_s}\right) dq_s;$$

par conséquent,

$$\sum \left(\frac{\partial T}{\partial p_s}\right) dp_s + \sum \left(\frac{\partial T}{\partial q_s}\right) dq_s = \sum q'_s dp_s - \sum \frac{\partial T}{\partial q_s} dq_s.$$

Cette équation devant être identique, on a :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p_s}\right) = q'_s,$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial q_s}\right) = -\frac{\partial T}{\partial q_s}.$$

Si, maintenant, nous remplaçons $\frac{\partial T}{\partial q_s}$ dans la première des équations (11), il vient :

$$\frac{dp_s}{dt} = \frac{\partial U}{\partial q_s} - \left(\frac{\partial T}{\partial q_s}\right),$$

et alors les équations (11) peuvent être remplacées par les suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_s}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial q_s} - \left(\frac{\partial T}{\partial q_s}\right), \\ q'_s = \frac{dq_s}{dt} &= \left(\frac{\partial T}{\partial p_s}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

14. Si l'on compare la seconde de ces équations (12) avec la seconde des équations (11)

$$p_s = \frac{\partial T}{\partial q'_s},$$

on en conclut qu'il existe entre les quantités q' et p une sorte de réciprocité.

15. Afin de donner aux équations (12) une forme plus simple, posons :

$$H = T - U,$$

nous aurons :

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q_s}\right) = \left(\frac{\partial T}{\partial q_s}\right) - \left(\frac{\partial U}{\partial q_s}\right),$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p_s}\right) = \left(\frac{\partial T}{\partial p_s}\right) - \left(\frac{\partial U}{\partial p_s}\right).$$

Mais, comme nous l'avons déjà remarqué, U ne renferme pas $p_1, p_2, \ldots p_k$; par conséquent,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial p_s}\right) = 0;$$

d'autre part,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_s}\right) = \frac{\partial U}{\partial q_s},$$

puisque U ne renferme que les q, et par suite, ne change pas quand on remplace les q' en fonction des p.

On a donc :

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q_s}\right) = \left(\frac{\partial T}{\partial q_s}\right) - \frac{\partial U}{\partial q_s},$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p_s}\right) = \left(\frac{\partial T}{\partial p_s}\right).$$

et les équations (12) deviennent :

$$\frac{dp_s}{dt} = -\left(\frac{\partial H}{\partial q_s}\right),$$

$$\frac{dq_s}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_s}\right).$$

Comme, dans ces dernières équations, il est évident que p et q sont les variables, on peut supprimer les parenthèses et écrire ces équations sous la forme suivante :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \\ \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

dans lesquelles $H = T - U$.

On a autant d'équations semblables à celles-ci qu'il y a de variables p et q.

C'est Hamilton qui a donné la forme (13) aux équations du

mouvement (*). Elles s'appellent les ***équations canoniques du mouvement***, ou ***système hamiltonien.***

La fonction $H = T - U$ a reçu de Jacobi le nom de *fonction caractéristique* (**).

16. *Remarque.* — Il est facile de retrouver au moyen des équations (13) le *principe des forces vives.* En effet, il résulte de ces équations (13) que *la fonction* H *reste constante pendant toute la durée du mouvement.*

Pour démontrer cette propriété, il suffit de prouver que l'on a :

$$\frac{dH}{dt} = 0.$$

Or, la fonction H étant, par hypothèse, une fonction de $q_1, \dots q_k, p_1, \dots p_k$, qui ne renferme pas *explicitement* le temps (***), on a :

$$\frac{dH}{dt} = \sum \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right).$$

Mais, si l'on multiplie les équations (13) respectivement par $\frac{dq_i}{dt}$ et $\frac{dp_i}{dt}$, et si l'on retranche, il vient :

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} = 0.$$

Donc, en faisant la somme pour toutes les valeurs de i depuis $i = 1$, jusque $i = k$, on a :

$$\sum \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) = 0,$$

et, par suite,

$$\frac{dH}{dt} = 0.$$

(*) *On a general method in dynamics* (Philosophical Transactions, 1834 et 1835); Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik.*

(**) *Vorlesungen über Dynamik,* p. 70.

(***) En effet, la fonction de force U ne renfermant pas, par hypothèse, explicitement le temps, il en est de même de la fonction $H = T - U$.

Par conséquent, on a :

$$H = const.$$

pendant toute la durée du mouvement.

D'ailleurs, on a posé :

$$H = T - U;$$

par conséquent, l'équation $H = const.$ nous donne :

$$T - U = T_0 - U_0,$$

ou bien :

$$T - T_0 = U - U_0,$$

l'indice 0 indiquant que l'on a fait $t = t_0$ dans T et U.

Or, T est la demi-somme des forces vives du système, et U la fonction de force : il en résulte que la dernière formule n'est autre que l'expression du théorème des forces vives.

17. *Remarque.* — Puisque l'on a $H = const.$ pendant toute la durée du mouvement, on en conclut que l'équation

$$H = const.$$

est *une intégrale des équations canoniques* (*) (13).

18. Dans le cas où il n'y a pas de fonction de force, on doit remplacer $\frac{\partial U}{\partial q_s}$ dans les équations (11) par l'expression

$$Q_s = \sum_i \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \right),$$

et alors les équations (13) seront remplacées par les suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i. \end{aligned} \right\} \qquad (14)$$

(*) On appelle intégrale des équations canoniques une équation telle que $\zeta = \alpha$, jouissant de cette propriété que l'on a identiquement $\frac{d\zeta}{dt} = 0$, en vertu des équations canoniques.

19. Les équations canoniques (13) sont au nombre de $2k$; ce sont des équations différentielles ordinaires. *La fonction* H *ne renferme pas explicitement le temps.* C'est la forme à laquelle on peut ramener les équations d'un problème de mécanique auquel le principe des forces vives est applicable. En les intégrant, on obtient $2k$ intégrales distinctes, contenant $2k$ constantes arbitraires. Ces $2k$ équations serviront à déterminer $p_1, p_2, \ldots p_k$, $q_1, q_2, \ldots q_k$, en fonction de t et des $2k$ constantes arbitraires.

20. *Application.* — Proposons-nous d'appliquer les équations (13) au cas où les variables $q_1, q_2, \ldots q_k$, sont précisément les coordonnées x_i, y_i, z_i, ce qui arrivera lorsqu'il n'y aura pas d'équations de liaisons. Le système est alors un système de n points matériels *entièrement libres.*

Dans ce cas, on a :

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2).$$

On en tire :

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i'} = \frac{\partial T}{\partial x_i'} = m_i x_i';$$

d'autre part,

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial x_i} = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial T}{\partial p_i} = \frac{\partial T}{\partial (m_i x_i')} = x_i',$$

$$\frac{\partial U}{\partial p_i} = 0.$$

Par suite, on a :

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = x_i',$$

et les équations (13) nous donnent :

$$\frac{d(m_i x'_i)}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x_i},$$

$$\frac{dx_i}{dt} = x'_i,$$

ou bien :

$$m_i \frac{dx'_i}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x_i},$$

$$\frac{dx_i}{dt} = x'_i.$$

Or, de ces deux dernières on tire :

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i},$$

de même, on a :

$$m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

On retrouve donc ainsi les équations ordinaires du mouvement du point m_i libre.

II.

Méthode de M. Émile Mathieu.

21. On peut obtenir les équations d'Hamilton sans faire usage des équations de Lagrange. La méthode directe que nous allons faire connaître est due à M. Émile Mathieu (*).

Reprenons l'équation

$$\sum m_i \left(\frac{d^2 x_i}{dt^2} \delta x_i + \frac{d^2 y_i}{dt^2} \delta y_i + \frac{d^2 z_i}{dt^2} \delta z_i \right) = \delta U, \qquad (1)$$

(*) *Journal de Liouville*, 2e série, t. XIX.

en supposant qu'il existe une fonction de force U, et soient

$$L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \quad ..., \quad L_m = 0, \tag{2}$$

les équations qui expriment les liaisons du système.

Supposons que ces équations, ainsi que la fonction de force U, *ne renferment pas explicitement le temps* t, et posons, comme précédemment :

$$\frac{dx_i}{dt} = x'_i, \quad \frac{dy_i}{dt} = y'_i, \quad \frac{dz_i}{dt} = z'_i;$$

nous aurons pour l'expression de la demi-force vive :

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2), \tag{3}$$

et l'équation (1) devient :

$$\sum m_i \left(\frac{dx'_i}{dt} \delta x_i + \frac{dy'_i}{dt} \delta y_i + \frac{dz'_i}{dt} \delta z_i\right) = \delta U.$$

Or, de l'équation (3) on tire :

$$2\delta T = \delta \sum m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) = \delta \sum m_i \left(x'_i \frac{dx_i}{dt} + y'_i \frac{dy_i}{dt} + z'_i \frac{dz_i}{dt}\right).$$

Cette même équation (3) nous donne aussi :

$$\begin{aligned} \delta T &= \sum m_i(x'_i \delta x'_i + y'_i \delta y'_i + z'_i \delta z'_i) \\ &= \sum m_i \left(x'_i \delta \frac{dx_i}{dt} + y'_i \delta \frac{dy_i}{dt} + z'_i \delta \frac{dz_i}{dt}\right). \end{aligned}$$

En soustrayant ces deux dernières équations, il vient :

$$\begin{aligned} \delta T = \delta &\sum m_i \left(x'_i \frac{dx_i}{dt} + y'_i \frac{dy_i}{dt} + z'_i \frac{dz_i}{dt}\right) \\ &- \sum m_i \left(x'_i \delta \frac{dx_i}{dt} + y'_i \delta \frac{dy_i}{dt} + z'_i \delta \frac{dz_i}{dt}\right); \end{aligned}$$

par suite, on a :

$$\begin{aligned} \delta \sum m_i \left(x'_i \frac{dx_i}{dt} + y'_i \frac{dy_i}{dt} + z'_i \frac{dz_i}{dt}\right) - \sum m_i \left(x'_i \delta \frac{dx_i}{dt} + y'_i \delta \frac{dy_i}{dt} + z'_i \delta \frac{dz_i}{dt}\right) \\ - \sum m_i \left(\frac{dx'_i}{dt} \delta x_i + \frac{dy'_i}{dt} \delta y_i + \frac{dz'_i}{dt} \delta z_i\right) = \delta T - \delta U, \end{aligned}$$

ou bien, en posant T — U = H,

$$\delta \sum m_i \left(x'_i \frac{dx_i}{dt} + y'_i \frac{dy_i}{dt} + z'_i \frac{dz_i}{dt} \right)$$
$$- \frac{d}{dt} \sum m_i (x'_i \delta x_i + y'_i \delta y_i + z'_i \delta z_i) = \delta H.$$

Si maintenant nous représentons les coordonnées x_i, y_i, z_i par la lettre Q affectée des indices 1, 2, 3, ... $3n$, et les quantités $m_i x'_i$, $m_i y'_i$, $m_i z'_i$, correspondantes par la lettre P affectée des mêmes indices, la dernière équation devient :

$$\delta \left(P_1 \frac{dQ_1}{dt} + P_2 \frac{dQ_2}{dt} + \cdots + P_{3n} \frac{dQ_{3n}}{dt} \right)$$
$$- \frac{d}{dt} (P_1 \delta Q_1 + P_2 \delta Q_2 + \cdots + P_{3n} \delta Q_{3n}) = \delta H. \quad (4)$$

Or, au moyen des m équations (2), on peut réduire le nombre des variables Q à $3n - m$; en d'autres termes, on peut exprimer les $3n$ variables Q en fonction de $3n - m$ nouvelles variables, de telle manière que les équations (2) soient identiquement satisfaites.

Désignons par $q_1, q_2, \ldots q_k$ ces $3n - m = k$ nouvelles variables, et choisissons des variables p_i, en même temps que les q_i, et qui satisfassent à l'équation :

$$p_1 \delta q_1 + p_2 \delta q_2 + \cdots + p_k \delta q_k = P_1 \delta Q_1 + P_2 \delta Q_2 + \cdots + P_{3n} \delta Q_{3n}. \quad (5)$$

Si l'on prend les variations virtuelles égales à celles que subissent effectivement les variables q_i et Q_i pendant le temps dt, ce que l'on peut faire, puisque nous avons supposé que les liaisons et la fonction U ne renferment pas explicitement le temps, l'équation (5) nous donne :

$$p_1 \frac{dq_1}{dt} + p_2 \frac{dq_2}{dt} + \cdots + p_k \frac{dq_k}{dt} = P_1 \frac{dQ_1}{dt} + \cdots + P_{3n} \frac{dQ_{3n}}{dt}, \quad (6)$$

et l'équation (4) devient :

$$\delta \left(p_1 \frac{dq_1}{dt} + \cdots + p_k \frac{dq_k}{dt} \right) - \frac{d}{dt} (p_1 \delta q_1 + \cdots + p_k \delta q_k) = \delta H,$$

ou bien, en effectuant les opérations indiquées, et supprimant les termes qui se détruisent :

$$\frac{dq_1}{dt}\delta p_1 + \cdots + \frac{dq_k}{dt}\delta p_k - \frac{dp_1}{dt}\delta q_1 - \cdots - \frac{dp_k}{dt}\delta q_k = \delta \mathrm{H}. \quad (7)$$

En remplaçant δH par sa valeur, il vient :

$$\frac{dq_1}{dt}\delta p_1 + \cdots + \frac{dq_k}{dt}\delta p_k - \frac{dp_1}{dt}\delta q_1 - \cdots - \frac{dp_k}{dt}\delta q_k$$
$$= \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_1}\delta q_1 + \cdots + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_1}\delta p_1 + \cdots + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_k}\delta p_k.$$

Comme il n'existe aucune équation de condition entre les nouvelles variables, nous aurons, en égalant les coefficients des mêmes variations dans les deux membres, les équations suivantes au nombre de $2k$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_i}. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Ce sont les *équations d'Hamilton.*

22. Passons maintenant à la détermination des variables p. Dans l'équation (5) les variations δq sont indépendantes ; cette équation nous donne donc pour la définition de p_s la formule

$$p_s = \mathrm{P}_1\frac{\partial \mathrm{Q}_1}{\partial q_s} + \mathrm{P}_2\frac{\partial \mathrm{Q}_2}{\partial q_s} + \cdots + \mathrm{P}_{3n}\frac{\partial \mathrm{Q}_{3n}}{\partial q_s}, \quad (9)$$

pour les valeurs de s égales à 1, 2, ... k.

Cette formule (9) nous permet de passer des variables de l'équation (4) à celles de l'équation (7) ou des équations (8). Mais, si nous avons égard aux significations particulières des P et des Q, cette équation (9) nous donne :

$$p_s = \sum m_i\left(x'_i\frac{\partial x_i}{\partial q_s} + y'_i\frac{\partial y_i}{\partial q_s} + z'_i\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right). \quad (9^{\text{bis}})$$

Or, en désignant par $q'_1, q'_2, \dots q'_k$, les dérivées de $q_1, q_2, \dots q_k$ par rapport à t, on a, en observant que les équations de condition ne renferment pas explicitement le temps :

$$x'_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} q'_2 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial q_k} q'_k; \tag{10}$$

d'où :

$$\frac{\partial x'_i}{\partial q'_s} = \frac{\partial x_i}{\partial q_s},$$

de même,

$$\frac{\partial y'_i}{\partial q'_s} = \frac{\partial y_i}{\partial q_s}, \quad \frac{\partial z'_i}{\partial q'_s} = \frac{\partial z_i}{\partial q_s};$$

par conséquent, il vient :

$$p_s = \sum m_i \left(x'_i \frac{\partial x'_i}{\partial q'_s} + y'_i \frac{\partial y'_i}{\partial q'_s} + z'_i \frac{\partial z'_i}{\partial q'_s} \right) = \frac{\partial T}{\partial q'_s}. \tag{11}$$

Il résulte de cette dernière formule que l'on aura la quantité p_s, en exprimant T en fonction des variables q, et de leurs dérivées q', et en prenant la dérivée de T par rapport à q'_s.

Mais, dans les équations (8), la fonction $H = T - U$ doit être exprimée en fonction des variables p_i, q_i. On doit donc exprimer T en fonction de ces mêmes variables.

Or, la formule (11) nous donne k équations linéaires par rapport à $q'_1, q'_2, \dots q'_k$. Si l'on tire de ces équations les valeurs de $q'_1, \dots q'_k$ en fonction des p_i, q_i, et si l'on remplace dans l'équation

$$2T = p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + \cdots + p_k q'_k,$$

qui résulte de l'équation (6), nous aurons T en fonction des variables p_i, q_i, et nous pourrons former les équations (8).

On voit donc que la formule

$$p_s = \frac{\partial T}{\partial q'_s},$$

résulte de la forme particulière des quantités P et Q, puisque pour passer de l'équation (9) à l'équation (9bis), nous avons remplacé P et Q, par mx' et x.

23. *Remarque.* — La démonstration de M. Émile Mathieu est plus simple que la démonstration ordinaire. Elle a aussi l'avantage de remplacer l'équation (1) par l'équation (4) qui est beaucoup plus générale.

24. Nous venons de voir que l'équation :

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q'_i},$$

résulte de la forme particulière des quantités P et Q, puisque, pour la démonstration de cette formule, nous avons remplacé Q par x, y, z, et P par mx', my', mz'.

Or, M. Mathieu a démontré que cette formule a lieu toutes les fois que la fonction H se compose d'une fonction $-U$ ne renfermant que les variables Q, et d'une fonction T homogène et du second degré par rapport aux variables P, cette fonction T pouvant contenir les variables Q d'une manière quelconque.

En effet, la fonction T étant homogène et du second degré par rapport aux quantités P, on a :

$$2T = P_1 \frac{\partial T}{\partial P_1} + P_2 \frac{\partial T}{\partial P_2} + \cdots + P_{3n} \frac{\partial T}{\partial P_{3n}}.$$

Mais l'équation (4) peut être mise sous la forme :

$$\frac{dQ_1}{dt}\delta P_1 + \frac{dQ_2}{dt}\delta P_2 + \cdots + \frac{dQ_{3n}}{dt}\delta P_{3n}$$
$$-\frac{dP_1}{dt}\delta Q_1 - \frac{dP_2}{dt}\delta Q_2 + \cdots - \frac{dP_{3n}}{dt}\delta Q_{3n} = \delta T - \delta U\,.$$

Or, nous supposons qu'il existe des relations entre les variables Q; mais il n'en existe pas entre les variables P. Par conséquent, les variations δP sont indépendantes. D'ailleurs, T étant une fonction des P_i, Q_i, et U ne renfermant pas les P_i, nous aurons, en égalant les coefficients des δP_i dans les deux membres, les équations :

$$\frac{\partial T}{\partial P_1} = Q'_1, \quad \frac{\partial T}{\partial P_2} = Q'_2, \ldots \frac{\partial T}{\partial P_{3n}} = Q'_{3n};$$

par conséquent, il vient :

$$2T = P_1Q'_1 + P_2Q'_2 + \cdots + P_{3n}Q'_{3n}.$$

Mais, en vertu de l'équation (6), qui a lieu dans le cas actuel comme précédemment (*), on a :

$$P_1Q'_1 + P_2Q'_2 + \cdots + P_{3n}Q'_{3n} = p_1q'_1 + p_2q'_2 + \cdots + p_kq'_k;$$

par conséquent,

$$2T = p_1q'_1 + p_2q'_2 + \cdots + p_kq'_k,$$

d'où :

$$2\delta T = p_1\delta q'_1 + p_2\delta q'_2 + \cdots + p_k\delta q'_k + q'_1\delta p_1 + q'_2\delta p_2 + \cdots + q'_k\delta p_k.$$

D'ailleurs, la première des équations (8) nous donne :

$$q'_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial T}{\partial p_i};$$

par suite,

$$2\delta T = p_1\delta q'_1 + \cdots + p_k\delta q'_k + \frac{\partial T}{\partial p_1}\delta p_1 + \cdots + \frac{\partial T}{\partial p_k}\delta p_k.$$

Or, en supposant T exprimée en fonction des q_i, p_i, on a :

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial p_1}\delta p_1 + \cdots + \frac{\partial T}{\partial p_k}\delta p_k + \left(\frac{\partial T}{\partial q_1}\right)\delta q_1 + \cdots + \left(\frac{\partial T}{\partial q_k}\right)\delta q_k \text{ (**)},$$

et, en retranchant cette équation de la précédente, il vient :

$$\delta T = p_1\delta q'_1 + \cdots + p_k\delta q'_k - \left(\frac{\partial T}{\partial q_1}\right)\delta q_1 - \cdots - \left(\frac{\partial T}{\partial q_k}\right)\delta q_k.$$

Mais, T étant considérée comme une fonction des q_i, q'_i, on a :

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial q_1}\delta q_1 + \cdots + \frac{\partial T}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial T}{\partial q'_1}\delta q'_1 + \cdots + \frac{\partial T}{\partial q'_k}\delta q'_k;$$

(*) Toutes les équations jusque (8) ont lieu sans qu'il soit nécessaire de particulariser P et Q.

(**) Nous désignons par $\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right)$ la dérivée par rapport à q_i de la fonction T, supposée exprimée en fonction des p_i, q_i.

en égalant les deux valeurs de δT, il vient :

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q'_i},$$

et l'on voit que cette équation a lieu indépendamment de la forme particulière des Q_i, P_i, c'est-à-dire que pour obtenir cette équation nous n'avons pas, comme précédemment, remplacé les Q_i par x_i, y_i, z_i, et les P_i par $m_i x'_i$, $m_i y'_i$, $m_i z'_i$.

25. *Remarque I.* — L'équation résultant de l'égalité des deux expressions de δT, nous montre que l'on a :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) = -\frac{\partial T}{\partial q_i},$$

$\left(\frac{dT}{dq_i}\right)$ étant la dérivée partielle de T considérée comme fonction des q_i, p_i, tandis que $\frac{dT}{dq_i}$ est la dérivée partielle de T considérée comme fonction des q_i, q'_i (n° **12**).

26. *Remarque II.* — Nous pouvons encore observer que l'équation (7) présente certains avantages sur les équations (8). D'abord, l'équation (7) est applicable dans le cas où il n'y a pas de *fonction de force,* tandis que les équations (8) exigent l'existence d'une fonction de force. En effet, pour obtenir les équations (8), on doit remplacer dans (7) δH par la valeur

$$\frac{\partial H}{\partial q_1}\delta q_1 + \cdots + \frac{\partial H}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial H}{\partial p_1}\delta p_1 + \cdots + \frac{\partial H}{\partial p_k}\delta p_k,$$

ce qui n'est possible que si l'on a H = T — U, c'est-à-dire s'il existe une fonction de force U.

Lorsqu'il n'existe pas de fonction de force, l'équation (7) subsistera encore, pourvu que l'on convienne que dans cette équation on ait :

$$\delta H = \delta T - \delta U,$$

expression dans laquelle δU n'est plus une différentielle exacte d'une fonction des x_i, y_i, z_i, mais une notation pour représenter l'expression (n° **3**)

$$\sum (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i),$$

X_i, Y_i, Z_i étant les composantes des forces. Mais, dans ce cas, δU n'étant plus une différentielle exacte, on ne pourra plus écrire :

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial q_1}\delta q_1 + \cdots + \frac{\partial H}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial H}{\partial p_1}\delta p_1 + \cdots + \frac{\partial H}{\partial p_k}\delta p_k,$$

et, par conséquent, on ne pourra plus déduire de (7) les équations (8).

Proposons-nous de trouver par quoi l'on devra, dans le cas actuel, remplacer les équations (8). A cet effet, observons que, si l'on remplace les variables Q_i, c'est-à-dire x_i, y_i, z_i par les variables $q_1, q_2, \ldots q_k$, il vient :

$$\delta U = G_1\delta q_1 + G_2\delta q_2 + \cdots + G_k\delta q_k,$$

et, en substituant dans le second membre de l'équation (7), on a, pour ce second membre :

$$\delta H = \frac{\partial T}{\partial q_1}\delta q_1 + \cdots + \frac{\partial T}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial T}{\partial p_1}\delta p_1 + \cdots + \frac{\partial T}{\partial p_k}\delta p_k$$
$$- G_1\delta q_1 - G_2\delta q_2 - \cdots - G_k\delta q_k;$$

l'équation (7) devient alors la suivante :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dq_1}{dt}\delta p_1 + \cdots + \frac{dq_k}{dt}\delta p_k - \frac{dp_1}{dt}\delta q_1 - \cdots - \frac{dp_k}{dt}\delta q_k\\ &= \frac{\partial T}{\partial q_1}\delta q_1 + \cdots + \frac{\partial T}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial T}{\partial p_1}\delta p_1 + \cdots + \frac{\partial T}{\partial p_k}\delta p_k\\ &- G_1\delta q_1 - G_2\delta q_2 - \cdots - G_k\delta q_k,\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

et, en égalant les coefficients des mêmes variables dans les deux membres, on obtient les équations :

$$\left.\begin{aligned}\frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial p_i},\\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial T}{\partial q_i} + G_i.\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Ce sont les équations qui remplaceront les équations (5) dans le cas où il n'y a pas de fonction de force (n° **18**).

27. L'équation (7) présente un autre avantage sur les équations (8) : c'est qu'elle a encore lieu, même dans le cas où les variables q_i satisferaient à des équations de condition.

En effet, considérons m' des équations (2), m' étant plus petit que m, ce nombre m' pouvant être nul. On pourra exprimer les variables Q au moyen de $3n - m'$ variables que nous désignerons par $q_1, q_2, \ldots q_k$, en posant $k = 3n - m'$, de manière que ces expressions des variables Q satisfassent identiquement aux m' équations :

$$L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \quad \ldots, \quad L_{m'} = 0.$$

En substituant ces expressions dans les $m - m'$ équations (2) qui n'ont pas été employées, nous aurons $m - m'$ équations de condition entre les q_i.

En posant alors :

$$p_1 \delta q_1 + p_2 \delta q_2 + \cdots + p_k \delta q_k = P_1 \delta Q_1 + \cdots + P_{3n} \delta Q_{3n}, \qquad (14)$$

on parviendra comme précédemment à l'équation :

$$\frac{dq_1}{dt} \delta p_1 + \cdots + \frac{dq_k}{dt} \delta p_k - \frac{dp_1}{dt} \delta q_1 - \cdots - \frac{dp_k}{dt} \delta q_k = \delta H; \qquad (7)$$

mais, cette fois, les variations δq_i, δp_i ne sont plus indépendantes, et, par conséquent, on ne pourra plus déduire de cette équation (7) les équations (8).

Les variables p_i sont encore déterminées par l'équation :

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q'_i} \cdot$$

En effet, les variations δq n'étant plus indépendantes dans l'équation (14), on ne pourra pas déduire de cette équation la suivante :

$$p_i = P_1 \frac{\partial Q_1}{\partial q_i} + \cdots + P_{3n} \frac{\partial Q_{3n}}{\partial q_i} \cdot$$

Cependant, on pourra poser *comme définition* de p_i :

$$p_i = P_1 \frac{\partial Q_1}{\partial q_i} + P_2 \frac{\partial Q_2}{\partial q_i} + \cdots + P_{3n} \frac{\partial Q_{3n}}{\partial q_i} \cdot \qquad (15)$$

On aura ainsi k équations, pour $s = 1, 2, \ldots k$, et ces k équations entraîneront comme conséquence l'équation (14). D'ailleurs, l'équation (15) nous donnera, comme précédemment,

$$p_s = \frac{\partial T}{\partial q'_s}.$$

Mais il est bon d'observer que, dans le cas actuel, l'équation (14) est la conséquence de l'équation (15), tandis que, dans le cas précédent, l'équation (9) était la conséquence de l'équation (5).

28. Nous avons supposé, dans ce qui précède, que les liaisons sont indépendantes du temps, ainsi que la fonction U, ce qui nous a permis de remplacer les déplacements virtuels par les déplacements effectifs. Lorsque les liaisons renfermeront explicitement le temps, cette opération ne sera plus possible, et nous ne pourrons plus déduire l'équation (6) de l'équation (5). Nous allons voir comment on doit, dans ce cas, modifier l'analyse qui précède.

Observons d'abord que les équations de liaisons équivalent aux équations qui expriment les $3n$ variables Q en fonction des $3n - m = k$ variables q, et qui actuellement renferment le temps :

$$Q_1 = \theta_1(t, q_1, q_2, \ldots, q_k),$$
$$Q_2 = \theta_2(t, q_1, q_2, \ldots, q_k),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

En éliminant $q_1, q_2, \ldots q_k$ entre ces $3n$ équations, on obtiendrait un système de m équations équivalent aux m équations de liaisons données.

Or, les variations δQ de l'équation (5) s'obtiennent en faisant varier $q_1, q_2, \ldots q_k$, mais t restant constant (*).

On a donc :

$$\delta Q_i = \frac{\partial \theta_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \theta_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial \theta_i}{\partial q_k}\delta q_k;$$

(*) C'est ce qui résulte du principe des vitesses virtuelles.

mais, d'autre part, si l'on désigne θ'_i la dérivée partielle de θ_i par rapport à t, il vient :

$$\frac{dQ_i}{dt} = \theta'_i + \frac{\partial \theta_i}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial \theta_i}{\partial q_2} q'_2 + \cdots + \frac{\partial \theta_i}{\partial q_k} q'_k;$$

mais, les variations δq étant arbitraires, nous pourrons poser :

$$\delta q_s = q'_s dt,$$

pour toutes les valeurs de s égales à 1, 2, ... k.

Nous aurons alors :

$$\delta Q_i = \left(\frac{dQ_i}{dt} - \theta'_i\right) dt.$$

Par suite, l'équation

$$p_1 \delta q_1 + \cdots + p_k \delta q_k = P_1 \delta Q_1 + \cdots + P_{3n} \delta Q_{3n}, \tag{5}$$

nous donnera :

$$p_1 \frac{dq_1}{dt} + \cdots + p_k \frac{dq_k}{dt} = P_1 \frac{dQ_1}{dt} + \cdots + P_{3n} \frac{dQ_{3n}}{dt} - P_1 \theta'_1 - \cdots - P_{3n} \theta'_{3n}.$$

L'équation (4) devient alors la suivante :

$$\delta \left(p_1 \frac{dq_1}{dt} + \cdots + p_k \frac{dq_k}{dt}\right) - \frac{d}{dt}(p_1 \delta q_1 + \cdots + p_k \delta q_k)$$
$$= \delta H - \delta(P_1 \theta'_1 + P_2 \theta'_2 + \cdots + P_{3n} \theta'_{3n}),$$

ou bien :

$$\delta \left(p_1 \frac{dq_1}{dt} + \cdots + p_k \frac{dq_k}{dt}\right) - \frac{d}{dt}(p_1 \delta q_1 + \cdots + p_k \delta q_k)$$
$$= \delta(H - P_1 \theta'_1 - P_2 \theta'_2 - \cdots - P_{3n} \theta'_{3n}).$$

On déduira de là, en effectuant les opérations du premier membre, comme nous l'avons fait pour obtenir l'équation (7), une équation qui conservera la même forme que (7), pourvu que l'on change H en :

$$H - P_1 \theta'_1 - P_2 \theta'_2 - \cdots - P_{3n} \theta'_{3n}.$$

Il en résulte donc que les équations d'Hamilton (8) subsisteront dans le cas actuel, pourvu que l'on y fasse le même changement.

Quant aux variables p_i elles seront données par les équations

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q'_i},$$

comme précédemment.

III.

Principe d'Hamilton.

29. Le principe d'Hamilton peut être énoncé de la manière suivante (*) :

Soient T *la demi-somme des forces vives des différents points du système,* δU *l'expression du travail virtuel des forces extérieures, on aura :*

$$\int_{t_0}^{t} (\delta T + \delta U) dt = 0, \tag{1}$$

(t_0 *et* t *désignant deux époques données*), *pour tous les déplacements compatibles avec les liaisons du système, pourvu que l'on donne les positions initiales et finales du système, ou que l'on suppose nuls les déplacements relatifs aux époques* t_0 *et* t.

On exprime quelquefois ce principe par la formule :

$$\delta \int_{t_0}^{t} (T + U) dt = 0.$$

Mais, la première formule est plus générale; car, lorsqu'il n'y a pas de *fonction de force,* U n'a aucun sens.

Le principe d'Hamilton se distingue de celui de la moindre action, en ce que, dans ce principe, U peut renfermer explicitement le temps, ce qui n'a pas lieu pour celui de la moindre action. En effet, le principe de la moindre action exige que le

(*) Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik,* p. 58.

théorème des forces vives existe, et ce théorème des forces vives permet d'éliminer le temps. Or, le théorème des forces vives n'a lieu que si U ne renferme pas explicitement le temps.

Considérons le premier membre de l'équation (1) :

$$\int_{t_0}^{t} (\delta T + \delta U)dt.$$

Nous aurons :

$$\begin{aligned}
\int \delta T dt &= \frac{1}{2}\int \delta \sum m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)dt \\
&= \int \sum m_i(x_i'\delta x_i' + y_i'\delta y_i' + z_i'\delta z_i')dt \\
&= \int \sum m_i\left(x_i'\frac{d\delta x_i}{dt} + y_i'\frac{d\delta y_i}{dt} + z_i'\frac{d\delta z_i}{dt}\right)dt \\
&= \sum m_i(x_i'\delta x_i + y_i'\delta y_i + z_i'\delta z_i) \\
&- \int \sum m_i(x_i''\delta x_i + y_i''\delta y_i + z_i''\delta z_i)dt.
\end{aligned}$$

Intégrons entre les limites t_0 et t, en observant que les positions de tous les points étant données à l'instant initial et à l'instant final, δx_i, δy_i, δz_i sont nuls aux deux limites; par conséquent, le terme en dehors du signe $\int$ est nul aux limites, et il vient :

$$\int_{t_0}^{t} (\delta T + \delta U)dt = \int_{t_0}^{t} \left\{ \delta U - \sum m_i(x_i''\delta x_i + y_i''\delta y_i + z_i''\delta z_i) \right\} dt,$$

ou bien, en remplaçant δU par sa valeur :

$$\delta U = \sum (X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i),$$

on a :

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t} (\delta T + \delta U)dt \\
&= \int_{t_0}^{t} \left\{ \sum (X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i) - \sum m_i(x_i''\delta x_i + y_i''\delta y_i + z_i''\delta z_i) \right\} dt \\
&= \int_{t_0}^{t} \sum \left\{ \left(X_i - m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}\right)\delta x_i + \left(Y_i - m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}\right)\delta y_i + \left(Z_i - m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}\right)\delta z_i \right\} dt.
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Or, si δx_i, δy_i, δz_i sont des déplacements compatibles avec les liaisons du système, le second membre est nul en vertu des équations du mouvement, et l'on a :

$$\int_{t_0}^{t} (\delta T + \delta U)dt = 0. \qquad (3)$$

20. *Remarque I.* — Il est facile de déduire de l'équation d'Hamilton les équations de Lagrange sous la forme qui nous a conduit aux équations canoniques (n° 7).

En effet, supposons qu'aux coordonnées x_i, y_i, z_i, on substitue d'autres variables $q_1, q_2, \ldots q_k$, et introduisons ce changement de variables dans la formule (3).

D'abord, T qui était primitivement une fonction des x'_i, y'_i, z'_i deviendra, par la substitution, une fonction des q_i et des q'_i, et nous aurons :

$$\delta T = \sum \left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial T}{\partial q'_i}\delta q'_i\right);$$

d'autre part, on a :

$$\delta U = \sum (X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i) = \sum Q_i\delta q_i.$$

Par conséquent, la formule (3) nous donne :

$$\int_{t_0}^{t} \sum \left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial T}{\partial q'_i}\delta q'_i + Q_i\delta q_i\right) dt = 0. \qquad (4)$$

Mais, en intégrant par parties, on a :

$$\int \frac{\partial T}{\partial q'_i}\delta q'_i dt = \int \frac{\partial T}{\partial q'_i}\frac{d.\delta q_i}{dt}dt = \frac{\partial T}{\partial q'_i}\delta q_i - \int \frac{d.\frac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt}\delta q_i dt;$$

d'où, en intégrant entre les limites t_0 et t, et observant que les variations δq_i sont toutes nulles aux deux limites :

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\partial T}{\partial q'_i}\delta q'_i dt = -\int_{t_0}^{t} \frac{d.\frac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt}\delta q_i dt.$$

On a donc, en substituant dans l'équation (4) :

$$\int_{t_0}^{t} \sum \left\{ \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d.\frac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt} + Q_i \right\} \delta q_i dt = 0,$$

et, par suite,

$$\sum \left(\frac{d.\frac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right) \delta q_i = 0.$$

C'est la formule de Lagrange que nous avons trouvée précédemment (n° 7).

31. *Remarque II.* — Le principe d'Hamilton, comme celui de la moindre action, ne fournit qu'une propriété du mouvement; il ne donne pas d'intégrale du problème.

32. *Remarque III.* — Le théorème d'Hamilton est distinct de celui de la moindre action. L'intégrale dont la variation est nulle, dans ce nouveau principe, diffère seulement, comme nous le verrons plus loin, de celle de la moindre action, dans le cas où le principe de la moindre action a lieu, par l'addition d'un terme proportionnel au temps. Mais, les conditions sous lesquelles la variation est nulle sont ici complètement changées, et le temps du trajet qui, dans le principe de la moindre action, ne jouait aucun rôle, est actuellement une des données de la question, tandis que la constante des forces vives qui était donnée alors, ne l'est plus dans le nouveau principe.

Si l'on applique, par exemple, les deux théorèmes au mouvement elliptique d'une planète, dans le premier (celui de la moindre action) le chemin réellement parcouru est comparé à tous les chemins possibles, ayant les mêmes extrémités, et pour lesquels la vitesse en chaque point est exprimée par l'intégrale des forces vives; dans le second, ce chemin est comparé à tous les chemins parcourus d'une manière arbitraire sous la seule condition que la durée du trajet ait une valeur donnée.

IV.

Équation différentielle partielle d'Hamilton.

22. Le principe d'Hamilton nous apprend que, s'il existe une fonction de forces U, et si l'on donne les valeurs initiales et finales des coordonnées, c'est-à-dire si les positions extrêmes du système restent fixes, la variation de l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t} (\mathrm{T} + \mathrm{U})dt,$$

doit s'annuler en vertu des équations du mouvement (n° **20**).

Supposons maintenant que les positions initiales et finales ne soient pas fixes (*); alors les variations δq_i ne sont pas nulles pour les limites t_0 et t. Nous allons voir que si l'on développe la variation

$$\delta \int_{t_0}^{t} (\mathrm{T} + \mathrm{U})dt,$$

il n'y a que la partie de cette variation, située sous le signe $\int$ qui soit nulle, en vertu des équations canoniques. Cette variation ne renfermera donc aucun signe $\int$, ou, ce qui est la même chose, la variation de T + U sera une différentielle exacte.

Nous pourrons même supposer, dans la démonstration, que la fonction de force U renferme explicitement le temps.

Supposons les $3n$ coordonnées x_i, y_i, z_i exprimées en fonction des $3n - m = k$ variables nouvelles $q_1, q_2, \ldots q_k$, de manière que les m équations de liaisons soient identiquement satisfaites.

Posons :

$$\mathrm{T} + \mathrm{U} = \varphi, \quad \text{et} \quad \mathrm{V} = \int_{t_0}^{t} \varphi dt;$$

(*) Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*, p. 143.

nous aurons, puisque φ est une fonction de $q_1, q_2, \dots q_k$, $q'_1, q'_2, \dots q'_k$, en prenant la variation de φ, *sans faire varier* t,

$$\delta\varphi = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}\delta q_i + \sum \frac{\partial \varphi}{\partial q'_i}\delta q'_i.$$

Par suite, si t est la variable indépendante,

$$\delta \int \varphi dt = \int \delta\varphi dt = \int \sum \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}\delta q_i dt + \int \sum \frac{\partial \varphi}{\partial q'_i}\delta q'_i dt.$$

Or, en intégrant par parties, on a :

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial q'_i}\delta q'_i dt = \int \frac{\partial \varphi}{\partial q'_i}\frac{d.\delta q_i}{dt}dt = \frac{\partial \varphi}{\partial q'_i}\delta q_i - \int \frac{d.\frac{\partial \varphi}{\partial q'_i}}{dt}\delta q_i dt;$$

si l'on intègre entre les limites t_0 et t, et si l'on désigne par un indice supérieur 0 les valeurs correspondant à la limite inférieure t_0, il vient :

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\partial \varphi}{\partial q'_i}\delta q'_i dt = \frac{\partial \varphi}{\partial q'_i}\delta q_i - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q'_i}\right)^0 \delta q_i^0 - \int_{t_0}^{t} \frac{d.\frac{\partial \varphi}{\partial q'_i}}{dt}\delta q_i dt,$$

par suite,

$$\delta V = \delta \int_{t_0}^{t} \varphi dt = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial q'_i}\delta q_i - \sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q'_i}\right)^0 \delta q_i^0$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} - \frac{d\frac{\partial \varphi}{\partial q'_i}}{dt}\right)\delta q_i dt.$$

Mais, la fonction U ne renferme pas les q'_i, puisque l'on a :

$$U = \text{fonct.}(t, q_1, \dots, q_k).$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q'_i} = \frac{\partial (T + U)}{\partial q'_i} = \frac{\partial T}{\partial q'_i} = p_i, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} = \frac{\partial (T + U)}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i};$$

donc, la quantité sous le signe $\int$ se réduit à :

$$\sum \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{d \cdot \frac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt} \right) \delta q_i.$$

Or, en vertu des équations différentielles du mouvement de Lagrange (n° 9), tous les termes de cette somme sont nuls séparément, puisque $k = 3n - m$: par conséquent, l'intégrale disparaît, et il vient :

$$\begin{aligned} \delta V = \delta \int_{t_0}^{t} \varphi dt &= \sum \frac{\partial \varphi}{\partial q'_i} \delta q_i - \sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q'_i} \right)^0 \delta q_i^0 \\ &= \sum p_i \delta q_i - \sum p_i^0 \delta q_i^0. \end{aligned}$$

24. Dans l'hypothèse précédente (n° 29), on donnait les positions initiales et finales, c'est-à-dire les valeurs initiales et finales des q_i, et, par suite, $\delta q_i^0 = 0$, $\delta q_i = 0$, et l'on obtenait :

$$\delta V = \delta \int_{t_0}^{t} \varphi dt = 0;$$

c'est le principe d'Hamilton.

Dans le cas actuel, les positions extrêmes étant arbitraires, les δq_i ne sont pas nuls aux limites, et, par suite, on a :

$$\delta V = \sum p_i \delta q_i - \sum p_i^0 \delta q_i^0, \qquad (2)$$

et le second membre n'est pas nul.

D'ailleurs, lorsque les positions extrêmes sont données, les variations δq_i sont nulles aux limites t_0 et t, et les constantes arbitraires introduites par l'intégration sont complètement déterminées par les positions extrêmes des points du système, lesquelles sont données. Au contraire, si les positions extrêmes sont arbitraires, les q_i, q'_i, et, par suite, les p_i qui sont liés aux q'_i par l'équation (1), sont des fonctions de t, et des $2k$ constantes arbitraires. La fonction

$$V = \int_{t_0}^{t} \varphi dt,$$

est donc aussi une fonction de t, et de ces $2k$ constantes arbitraires.

Les δq_i sont uniquement les variations des q_i provenant des variations des $2k$ constantes arbitraires.

La formule (2) donne la variation de V, provenant des variations des constantes arbitraires.

Cette formule (2) démontre la proposition énoncée plus haut, que *la variation de* T + U *est une différentielle exacte.* Observons que si l'on ne considérait pas t comme variable indépendante, on devrait ajouter au second membre de (2), le terme $\frac{\partial V}{\partial t}\delta t$.

35. L'expression que nous venons de trouver pour la variation de V, va nous conduire à des résultats importants. En effet, les intégrales des équations du mouvement, au nombre de $2k$, renferment les $2k$ quantités q_i, p_i, le temps t, et les $2k$ constantes arbitraires. On peut donc exprimer les variables q_i, p_i, au nombre de $2k$, et, par conséquent, aussi φ en fonction de t et des $2k$ constantes d'intégration, et, par une quadrature, on aura V en fonction de t et de ces $2k$ constantes d'intégration.

Mais, le choix des quantités qui forment les $2k$ constantes est arbitraire. Si l'on prend, par exemple, les $2k$ valeurs initiales q_i^0, p_i^0, on aura V exprimée en fonction de t, q_i^0, p_i^0. Mais les $2k+1$ variables t, q_i, p_i, et les $2k$ constantes q_i^0, p_i^0 forment un système de $4k+1$ quantités reliées les unes aux autres par $2k$ relations qui sont les équations intégrales. On peut donc, au moyen de ces $2k$ relations, exprimer $2k$ quantités en fonction des $2k+1$ autres. Supposons, par exemple, que l'on exprime les $2k$ quantités p_i, p_i^0, en fonction des $2k+1$ quantités t, q_i, q_i^0, et substituons les valeurs des p_i^0, ainsi obtenues, dans la fonction V, qui, d'après ce que nous avons dit plus haut, est déjà exprimée en fonction de t, q_i^0, p_i^0. Nous en déduirons la valeur de

$$V = \int_{t_0}^{t} \varphi dt,$$

en fonction de t, q_i, q_i^0.

Cela posé, si nous prenons la variation de V ainsi exprimée, *sans faire varier* t, il vient :

$$\delta V = \sum \frac{\partial V}{\partial q_i}\,\delta q_i + \sum \frac{\partial V}{\partial q_i^0}\,\delta q_i^0$$

En comparant les deux expressions de δV, on obtient les équations :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i, \qquad \frac{\partial V}{\partial q_i^0} = -\,p_i^0, \qquad (3)$$

pour $i = 1, 2, \ldots k$.

Ces équations (3) qui donnent p_i et p_i^0 en fonction de t, q_i, q_i^0, peuvent donc remplacer les $2k$ équations qui relient les $4k + 1$ quantités $t, q_i, q_i^0, p_i, p_i^0$. Elles sont, par conséquent, équivalentes aux $2k$ équations intégrales : il sera évidemment facile de les former lorsque la fonction V sera connue en fonction de t, q_i, q_i^0.

36. Il est facile de s'assurer que *la fonction* V *satisfait à une équation différentielle partielle du premier ordre que nous allons obtenir.*

A cet effet, reprenons la formule :

$$V = \int_{t_0}^{t} \varphi\, dt,$$

qui définit la fonction V. On en tire :

$$\varphi = \frac{dV}{dt}.$$

Or, t est contenu dans V d'abord explicitement, et, en outre, implicitement, puisque V est fonction de $q_1, q_2, \ldots q_k$, qui sont des fonctions de t. On a donc l'équation :

$$\varphi = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum \frac{\partial V}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt},$$

à laquelle doit satisfaire identiquement la fonction V.

Mais, en vertu de (3), cette équation nous donne :

$$\varphi = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum p_i q'_i,$$

ou bien :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum p_i q'_i - \varphi = 0. \tag{4}$$

Si maintenant l'on pose :

$$\psi = \sum p_i q'_i - \varphi, \tag{5}$$

l'équation (4) devient :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0. \tag{6}$$

Telle est l'équation à laquelle doit satisfaire la fonction V. Or, *cette équation est une équation aux dérivées partielles du premier ordre en* V.

En effet, les quantités q'_i et les p_i que nous avons introduites en posant :

$$p_i = \frac{\partial \varphi}{\partial q'_i}, \tag{1}$$

forment deux systèmes de quantités qui peuvent être exprimées les unes en fonction des autres, et, en outre, en même temps en fonction de t, q_i.

Il résulte de cette liaison entre les q'_i et les p_i qu'une expression quelconque donnée des $3k + 1$ quantités t, q_i, q'_i, p_i, peut être exprimée, ou bien en fonction des $2k + 1$ quantités t, q_i, q'_i, ou bien en fonction des $2k + 1$ quantités t, q_i, p_i. C'est ce qui arrivera précisément pour la fonction ψ.

En effet, en vertu de (5), ψ est une fonction des $3k + 1$ quantités t, q_i, q'_i et p_i. Par conséquent, d'après ce que nous venons de dire, on pourra exprimer ψ en fonction des quantités t, q_i, p_i, et, si l'on remplace, en vertu de la première des équations (3), les p_i par les quotients différentiels partiels $\frac{\partial V}{\partial q_i}$, il en résultera que ψ sera exprimée en fonction de t, q_i, $\frac{\partial V}{\partial q_i}$. L'équation (6) devient alors :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi\left(t,\ q_1,\ q_2, \dots,\ q_k,\ \frac{\partial V}{\partial q_1},\ \frac{\partial V}{\partial q_2},\ \dots\ \frac{\partial V}{\partial q_k}\right) = 0. \tag{7}$$

C'est *l'équation différentielle partielle d'Hamilton à laquelle satisfait la fonction*

$$V = \int_{t_0}^{t} \varphi dt = \int_{t_0}^{t} (T + U)\, dt,$$

considérée comme fonction de t, q_i, q_i^0. Cette fonction V renferme donc k constantes arbitraires; si l'on augmente V d'une nouvelle constante additive, elle satisfera encore à l'équation (7), et nous aurons ainsi une solution renfermant $k + 1$ constantes arbitraires, c'est-à-dire une *solution complète*.

L'intégration des équations canoniques donne donc une solution complète de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre (7).

37. Inversement, si l'on pouvait obtenir cette expression de V, on aurait, en vertu des équations canoniques,

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial V}{\partial q_i^0} = -p_i^0,$$

et les secondes de ces équations, au nombre de k, seraient les intégrales finies du problème.

Nous trouvons ainsi une liaison entre les deux problèmes de l'intégration des équations de la mécanique, et de l'intégration des équations différentielles partielles du premier ordre.

Tout ce que nous venons de dire serait encore vrai, si la fonction φ, au lieu d'être égale à $T + U$, désigne une fonction quelconque des quantités t, q_i, q'_i : c'est ce que nous verrons dans le chapitre suivant.

38. *Remarque.* — Dans les problèmes de mécanique, la fonction ψ prend une forme très simple. Pour trouver cette forme, reprenons l'équation

$$\psi = \sum p_i q'_i - \varphi,$$

et remplaçons φ par sa valeur $T + U$, U désignant une fonction des q_i seulement, *ne renfermant pas explicitement le temps*, et T une fonction homogène et du second degré des q'_i.

On a d'ailleurs :

$$p_i = \frac{\partial \varphi}{\partial q'_i} = \frac{\partial T}{\partial q'_i},$$

d'où :

$$\sum p_i q'_i = \sum q'_i \frac{\partial T}{\partial q'_i} = 2T;$$

par suite,

$$\psi = 2T - (T + U) = T - U = H.$$

L'équation aux dérivées partielles est alors :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0,$$

et l'on a le théorème suivant :

29. Théorème. — *Soient :*

$$H = T - U, \quad \text{et} \quad p_i = \frac{\partial T}{\partial q'_i},$$

et supposons que H *soit exprimée en fonction des* p_i, q_i; *les équations différentielles du mouvement sont alors :*

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Considérons le mouvement pendant l'intervalle de t_0 *à* t, *et introduisons comme constantes arbitraires dans les intégrales les valeurs initiales* p_i^0, q_i^0.

Si l'on remplace ensuite dans H *les* p_i *par* $\frac{\partial V}{\partial q_i}$, *en posant :*

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i},$$

on obtient l'équation différentielle partielle du premier ordre :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0,$$

qui définit la fonction V *en fonction des variables* t, q_i. *Formons maintenant l'intégrale*

$$\int_{t_0}^{t} (T + U)dt,$$

dans laquelle T + U *est, en vertu des intégrales des équations du mouvement, une simple fonction de* t *et des* 2k *constantes* q_i^0, p_i^0, *et exprimons le résultat de la quadrature en fonction de* t, q_i *et des* k *constantes arbitraires* q_i^0, *en remplaçant les* p_i^0 *par leurs valeurs tirées des intégrales des équations du mouvement. La valeur ainsi obtenue de l'intégrale*

$$V = \int_{t_0}^{t} (T + U)dt,$$

est une solution complète de l'équation différentielle partielle :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0.$$

V.

Généralisation de la théorie précédente.

40. On peut étendre tous les raisonnements que nous venons de faire dans le cas d'un problème de mécanique, au cas où la fonction φ serait une fonction quelconque de t, q_i, q'_i ; en d'autres termes, nous allons actuellement considérer l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t} \varphi dt,$$

dans laquelle φ n'est pas égale à T + U (*).

On trouve, dans ce cas, pour la variation de l'intégrale :

$$\delta \int_{t_0}^{t} \varphi dt = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial q'_i} \delta q_i - \sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q'_i}\right)^0 \delta q_i^0 + \int_{t_0}^{t} \sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} - \frac{d \frac{\partial \varphi}{\partial q'_i}}{dt} \right) \delta q_i dt.$$

(*) Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*, p. 148.

Si, dans ce développement de la variation de l'intégrale, on égale à zéro la quantité qui se trouve sous le signe $\int$, les équations que l'on obtiendra sont celles qui, dans l'hypothèse actuelle, remplacent les équations du mouvement de Lagrange.

Ces équations ont pour type :

$$\frac{d \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial q'_i}}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}, \tag{A}$$

et il vient :

$$\delta \int_{t_0}^{t} \varphi dt = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial q'_i} \delta q_i - \sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q'_i}\right)^0 \delta q_i^0.$$

Nous nous proposons actuellement, pour rendre l'analogie des deux problèmes plus complète, de mettre les équations différentielles (A) sous la même forme qu'Hamilton a donnée aux équations du mouvement, c'est-à-dire la *forme canonique.* Dans ce but, de même que précédemment (n° **13**), on a remplacé les q'_i par les p_i, en posant $p_i = \frac{\partial T}{\partial q'_i}$, nous remplacerons dans le cas actuel, les q'_i par les p_i, en posant :

$$p_i = \frac{\partial \varphi}{\partial q'_i}.$$

On a ainsi k équations qui permettent de calculer les q'_i en fonction des p_i et des q_i.

Introduisons maintenant la fonction

$$\psi = \sum p_i q'_i - \varphi,$$

et opérons comme ci-dessus.

Nous aurons pour la variation de ψ :

$$\delta\psi = \sum p_i \delta q'_i + \sum q'_i \delta p_i - \delta\varphi,$$

et, en remplaçant $\delta\varphi$ par sa valeur, φ étant considérée comme une fonction des q_i et des q'_i :

$$\begin{aligned}\delta\varphi &= \sum \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \delta q_i + \sum \frac{\partial \varphi}{\partial q'_i} \delta q'_i + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \delta t \\ &= \sum \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \delta q_i + \sum p_i \delta q'_i + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \delta t,\end{aligned}$$

ce dernier terme devant figurer dans $\delta\varphi$, lorsqu'on laisse la variable indépendante arbitraire, il vient :

$$\begin{aligned}\delta\psi &= \sum p_i\delta q'_i + \sum q'_i\delta p_i - \sum \frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\delta q_i - \sum p_i\delta q'_i - \frac{\partial\varphi}{\partial t}\delta t \\ &= \sum q'_i\delta p_i - \sum \frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\delta q_i - \frac{\partial\varphi}{\partial t}\delta t.\end{aligned}$$

Or, la fonction ψ, par sa définition, est une fonction des $3k + 1$ quantités t, q'_i, p_i, q_i; mais, à cause de la formule

$$p_i = \frac{\partial\varphi}{\partial q'_i},$$

on peut exprimer les q'_i en fonction des p_i, et ψ devient une fonction de t, q_i, p_i, et en prenant la variation de ψ ainsi exprimée, on a :

$$\delta\psi = \sum \left(\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\right)\delta p_i + \sum \left(\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\right)\delta q_i + \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\delta t,$$

en renfermant dans ce cas les quotients différentiels entre parenthèses pour les distinguer. Nous aurons donc en égalant les deux valeurs de $\delta\psi$:

$$q'_i = \left(\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\right), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial q_i} = -\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\right), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right). \qquad (1)$$

Or, en égalant à zéro la quantité sous le signe $\int$, nous avons obtenu les équations différentielles ayant pour type :

$$\frac{d \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial q'_i}}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial q_i}; \qquad (A)$$

cette équation se transforme en la suivante :

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial q_i},$$

et, par suite, en ayant égard à la deuxième équation (1), on a :

$$\frac{dp_i}{dt} = -\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\right).$$

D'autre part, la première des équations (1) nous donne :

$$\frac{dq_i}{dt} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\right).$$

Nous aurons donc pour les équations différentielles du problème :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= -\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\right), \\ \frac{dq_i}{dt} &= \left(\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\right), \end{aligned}\right\} \qquad \text{(B)}$$

équations analogues à celles d'Hamilton (n° **15**).

Or, l'intégration de ces équations nous fournira, en posant, comme précédemment :

$$V = \int_{t_0}^{t} \varphi dt,$$

une solution de l'équation différentielle partielle du premier ordre :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0.$$

En effet, la variation de l'intégrale V devient, en vertu des équations canoniques (A) (*) :

$$\delta V = \sum p_i \delta q_i - \sum p_i^0 \delta q_i^0 + \frac{\partial V}{\partial t} \delta t,$$

ce dernier terme devant entrer dans δU, lorsqu'on laisse la variable indépendante indéterminée.

Mais, en vertu des équations différentielles du problème, on obtient $2k$ équations intégrales renfermant t, q_i, q_i' et $2k$ constantes arbitraires; par conséquent, les q_i et les q_i', et, par suite, les q_i et les p_i sont des fonctions de t et des $2k$ constantes.

(*) En effet, en vertu des équations canoniques (A), le terme sous le signe $\int$ dans le second membre de δV est nul, et, par conséquent, δV se réduit à la partie en dehors du signe $\int$.

Il en sera donc de même de φ, et, par suite, de V qui sera une fonction de t et des $2k$ constantes. Prenons pour ces $2k$ constantes les $2k$ valeurs initiales q_i^0, p_i^0; alors φ, et par conséquent, V sont des fonctions de t et des $2k$ constantes q_i^0, p_i^0. Les $2k$ équations intégrales renferment donc les $4k+1$ quantités t, q_i, p_i, q_i^0, p_i^0; on peut, par conséquent, déterminer les $2k$ quantités p_i, p_i^0, en fonction des $2k+1$ quantités q_i, q_i^0 et t, et, par suite, V pourra être exprimée en fonction de t, q_i, q_i^0, et l'on aura :

$$\delta V = \sum \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i + \sum \frac{\partial V}{\partial q_i^0} \delta q_i^0 + \frac{\partial V}{\partial t} \delta t.$$

En égalant les deux valeurs de δV, on a les $2k$ équations :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial q_i} &= p_i, \\ \frac{\partial V}{\partial q_i^0} &= -p_i^0, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

qui sont évidemment équivalentes aux $2k$ équations intégrales.

Mais, à cause de :

$$V = \int_{t_0}^{t} \varphi dt,$$

on a :

$$\frac{dV}{dt} = \varphi = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum \frac{\partial V}{\partial q_i} q_i',$$

puisque V est une fonction de t et des q_i qui sont des fonctions de t.

Par conséquent, la fonction V doit satisfaire identiquement à l'équation :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum p_i q_i' - \varphi = 0,$$

ou bien :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0,$$

en posant :

$$\psi = \sum p_i q_i' - \varphi,$$

et l'on verra, comme dans le chapitre précédent, que si l'on remplace dans ψ, exprimée en fonction de t, q_i, p_i, les p_i par les quotients différentiels partiels $\frac{\partial V}{\partial q_i}$, on obtiendra l'équation différentielle partielle du premier ordre :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi\left(t, q_1, q_2, \ldots q_k, \frac{\partial V}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial V}{\partial q_k}\right) = 0,$$

à laquelle satisfait la fonction

$$V = \int_{t_0}^{t} \varphi dt,$$

considérée comme fonction de t, q_i, q_i^0, et nous aurons le théorème suivant qui est dû à Jacobi :

11. Théorème. — *Soit φ une fonction quelconque donnée de* t, q_i, q_i', *et remplaçons les quotients différentiels* q_i' *par les nouvelles variables* p_i, *définies par les équations :*

$$p_i = \frac{\partial \varphi}{\partial q_i'};$$

posons ensuite :

$$\psi = \sum p_i q_i' - \varphi,$$

et exprimons la fonction ψ au moyen des variables p_i, q_i *et* t.

Les équations différentielles ordinaires :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial \psi}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial \psi}{\partial q_i}, \end{aligned}\right\} (^*) \qquad \text{(B)}$$

rendent nulle la partie de la variation

$$\delta \int_{t_0}^{t} \varphi dt,$$

située sous le signe $\int$.

(*) Nous supprimons ici les crochets qui sont devenus inutiles, puisque nous n'avons plus de distinction à faire.

Désignons en outre par p_i^0, q_i^0 *les valeurs des* 2k *variables* p_i, q_i *pour* $t = t_0$, *et introduisons ces quantités au lieu des constantes arbitraires dans les intégrales du système* (B). *Posons ensuite :*

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i},$$

et nous aurons l'équation différentielle partielle du premier ordre :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0,$$

qui définit V *en fonction de* t *et des* q_i.

Si maintenant l'on forme l'intégrale :

$$V = \int_{t_0}^{t} \varphi dt = \int_{t_0}^{t} \left\{ \sum p_i \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \psi \right\} dt,$$

φ *étant, en vertu des intégrales, une fonction de* t, *et des* 2k *constantes* q_i^0, p_i^0, *et si l'on exprime le résultat de la quadrature en fonction de* t, q_i, q_i^0, *la valeur ainsi obtenue pour* V *est une solution de l'équation différentielle partielle :*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0.$$

42. *Remarque I.* — La formule qui relie les fonctions φ et ψ établit entre elles une sorte de réciprocité.

En effet, nous avons posé :

$$\psi = \sum q'_i \frac{\partial \varphi}{\partial q'_i} - \varphi,$$

φ étant une fonction de t, q_i, q'_i.

Or, au moyen de la relation :

$$p_i = \frac{\partial \varphi}{\partial q'_i},$$

on peut exprimer les q'_i en fonction des p_i, et, par conséquent, obtenir ψ en fonction de t, q_i, p_i.

Donc, pour une fonction φ de t, q_i, q'_i, on peut obtenir une fonction ψ de t, q_i, p_i.

Mais, on a aussi :

$$\varphi = \sum p_i q'_i - \psi = \sum p_i \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \psi,$$

ψ étant une fonction de t, p_i, q_i.

Or, au moyen de la relation :

$$q'_i = \frac{\partial \psi}{\partial p_i},$$

on peut exprimer les p_i en fonction des q'_i, et, par conséquent, obtenir φ en fonction de t, q_i, q'_i.

Il résulte de là que l'on peut, en vertu de la formule

$$\psi = \sum p_i q'_i - \varphi,$$

pour chaque fonction φ de t, q_i, q'_i, trouver une fonction ψ de t, q_i, p_i; et, réciproquement, pour chaque fonction ψ de t, q_i, p_i, trouver une fonction φ de t, q_i, q'_i.

43. *Remarque II.* — La solution trouvée de l'équation différentielle partielle :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0,$$

renferme, comme nous l'avons vu, les k constantes arbitraires q^0_1, q^0_2, ... q^0_k. Comme la fonction ψ ne renferme pas la fonction V elle-même, on peut ajouter à cette solution une constante additive, et le résultat satisfera encore à l'équation différentielle partielle. Nous aurons ainsi une solution renfermant $k+1$ constantes arbitraires, c'est-à-dire une *solution complète de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre* : cette solution renfermera autant de constantes arbitraires qu'il y a de variables indépendantes dans l'équation différentielle partielle.

44. *Remarque III.* — De même que l'intégration des équations canoniques du mouvement, ou des équations différen-

tielles (B), fournit une solution complète de l'équation différentielle partielle :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0,$$

de même, réciproquement, on peut, au moyen de cette solution complète supposée connue, former les intégrales des équations différentielles (B).

En effet, ces intégrales sont, comme nous l'avons vu (nº **40**), équivalentes aux équations :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial V}{\partial q_i^0} = -p_i^0, \tag{2}$$

et nous avons ainsi les intégrales *exprimées par les quotients différentiels d'une même fonction* V.

Observons ici que les équations différentielles du problème étaient exprimées par les quotients différentiels d'une même fonction H, dans le cas de la mécanique (nº **15**), ou d'une même fonction ψ dans le cas plus général (nº **40**).

Cette fonction V a reçu d'Hamilton le nom de *fonction principale.*

La deuxième des équations (2) :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i^0} = -p_i^0,$$

donne les *intégrales finies* du problème.

La première de ces équations (2) :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i,$$

donne les quantités p_i ou q_i' en fonction de t, et des q_i, avec k constantes arbitraires q_i^0. C'est le système des *intégrales premières.*

45. Nous verrons plus loin qu'il n'est pas absolument nécessaire que les k constantes contenues dans V soient les valeurs

initiales q_i^0 : mais, si l'on connaît une solution complète V quelconque de l'équation différentielle partielle :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0,$$

les constantes étant quelconques, les intégrales des équations canoniques pourront toujours être exprimées par les quotients différentiels partiels de cette fonction V par rapport aux constantes qui y sont contenues. C'est le théorème de Jacobi que nous verrons dans la suite.

46. Hamilton définissait la fonction V au moyen de deux équations différentielles partielles, l'équation :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0,$$

et une autre (*).

Mais, Jacobi a démontré que cette deuxième équation ne sert à rien pour la solution, et d'ailleurs elle peut se déduire de la première. L'introduction de cette deuxième équation n'apporterait aucune simplification à la solution du problème. En effet, la fonction V devrait alors satisfaire à deux équations différentielles partielles simultanées. Or, le problème de la recherche d'une solution commune à deux équations différentielles partielles simultanées n'est pas plus simple que celui de la recherche d'une solution complète d'une seule équation différentielle partielle.

47. Pour démontrer que la deuxième équation différentielle partielle d'Hamilton peut se déduire de la première, Jacobi fait usage du théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soit un système de* n *équations différentielles ordinaires entre les* $n+1$ *variables* $t, x_1, \ldots x_n$; *soient* $x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$ *les valeurs des variables à l'origine* t_0 *du temps, et supposons*

(*) *Philosophical Transactions*, 1834 et 1835.

que l'on ait satisfait au système des équations différentielles ordinaires proposées par le système d'équations intégrales :

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = f_1(t,\ t_0,\ x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0), \\ x_2 = f_2(t,\ t_0,\ x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n = f_n(t,\ t_0,\ x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0). \end{array}\right\} \quad (A)$$

Si l'on remplace dans ce système les variables $t, x_1, \ldots x_n$, *par leurs valeurs initiales* $t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$ *et réciproquement, je dis que l'on obtient un système équivalent d'équations intégrales.*

Ce théorème dispense de faire le travail ennuyeux de l'élimination, et il permet d'exprimer facilement les équations intégrales résolues par rapport aux constantes arbitraires de la manière suivante :

$$\left.\begin{array}{l} x_1^0 = f_1(t_0,\ t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n), \\ x_2^0 = f_2(t_0,\ t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n^0 = f_n(t_0,\ t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n). \end{array}\right\} \quad (B)$$

Démonstration. — Soit le système d'équations intégrales :

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = F_1(t,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n), \\ x_2 = F_2(t,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n = F_n(t,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n), \end{array}\right\} \quad (C)$$

satisfaisant aux équations différentielles données; il en résulte entre les valeurs initiales le même système d'équations, savoir :

$$\left.\begin{array}{l} x_1^0 = F_1(t_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n), \\ x_2^0 = F_2(t_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n^0 = F_n(t_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n). \end{array}\right\} \quad (D)$$

Le système (A) résulte évidemment de l'élimination de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, entre (C) et (D). Or, ces deux derniers systèmes se transforment l'un dans l'autre, si l'on change t en t_0, et en même

temps x_1 en x_1^0, x_2 en x_2^0, ... x_n en x_n^0; par conséquent, on doit pouvoir faire ce changement dans (A), et l'on obtient alors (B) qui est donc équivalent à (A).

18. Voyons maintenant ce que devient la fonction V, quand on change les variables en leurs valeurs initiales.

Supposons que les équations de la mécanique (n° **15**), ou les équations différentielles plus générales (n° **40**), soient intégrées par le système :

$$\begin{array}{ll} q_1 = \xi_1(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}), & p_1 = \varpi_1(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}), \\ q_2 = \xi_2(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}), & p_2 = \varpi_2(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}), \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ q_k = \xi_k(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}), & p_k = \varpi_k(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}). \end{array}$$

Si l'on remplace t par sa valeur initiale t_0, on a :

$$\begin{array}{ll} q_1^0 = \xi_1(t_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}), & p_1^0 = \varpi_1(t_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}), \\ q_2^0 = \xi_2(t_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}), & p_2^0 = \varpi_2(t_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}), \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ q_k^0 = \xi_k(t_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}), & p_k^0 = \varpi_k(t_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}). \end{array}$$

Cela posé, considérons l'intégrale :

$$V = \int_{t_0}^{t} \varphi dt,$$

φ étant une fonction de t, q_1, q_2, ... q_k, p_1, p_2, ... p_k, qui, après l'introduction des valeurs de q_1, q_2, ... q_k, p_1, p_2, ... p_k, déduites des équations intégrales précédentes, devient une fonction de t, α_1, α_2, ... α_{2k}. On a donc, d'après cela :

$$\int \varphi dt = \Phi(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}),$$

et, par suite :

$$V = \int_{t_0}^{t} \varphi dt = \Phi(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}) - \Phi(t_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k}).$$

La quantité V ainsi déterminée sera, d'après ce que nous

avons vu (n° 40) une solution complète de l'équation différentielle partielle :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0,$$

pourvu que l'on élimine les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2k}$, au moyen des $2k$ équations ci-dessus pour $q_1, q_2, \dots q_k, q_1^0, q_2^0, \dots q_k^0$.

Mais, de ces $2k$ équations, une moitié se transforme dans l'autre, si l'on change t en t_0, et les quantités q_i en q_i^0. Donc, *chacune des quantités* $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2k}$, *sera exprimée en fonction de* t, t_0, $q_1, q_2, \dots q_k, q_1^0, q_2^0, \dots q_k^0$, *de manière qu'elle reste invariable, si l'on change* t *en* t_0, q_i *en* q_i^0.

Par ce changement, la fonction :

$$V = \Phi(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2k}) - \Phi(t_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2k}),$$

se change en la suivante :

$$\Phi(t_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2k}) - \Phi(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2k}),$$

c'est-à-dire en $-$V.

49. Dans tout ce qui précède, nous n'avons fait aucune hypothèse sur les équations différentielles. Supposons maintenant, pour obtenir le cas considéré par Hamilton, *que* φ *ne renferme pas explicitement la variable* t. C'est le cas de la mécanique, lorsque t n'entre pas dans la fonction de force U, ni, par suite, dans la fonction $\psi = H = T - U$; alors t n'entre dans les équations différentielles du mouvement que par sa différentielle.

Ces équations peuvent être mises sous la forme suivante :

$$dt : dq_1 : dq_2 : \cdots : dq_k : dp_1 : dp_2 : \cdots : dp_k$$
$$= 1 : \frac{\partial\psi}{\partial p_1} : \frac{\partial\psi}{\partial p_2} : \cdots : \frac{\partial\psi}{\partial p_k} : -\frac{\partial\psi}{\partial q_1} : -\frac{\partial\psi}{\partial q_2} : \cdots : -\frac{\partial\psi}{\partial q_k}.$$

En faisant abstraction de dt et 1, on élimine complètement le temps, et l'on a le système :

$$dq_1 : dq_2 : \cdots : dq_k : dp_1 : dp_2 : \cdots : dp_k$$
$$= \frac{\partial\psi}{\partial p_1} : \frac{\partial\psi}{\partial p_2} : \cdots : \frac{\partial\psi}{\partial p_k} : -\frac{\partial\psi}{\partial q_1} : -\frac{\partial\psi}{\partial q_2} : \cdots : -\frac{\partial\psi}{\partial q_k};$$

par l'intégration de ce système on exprimera toutes les variables en fonction de l'une d'entre elles, q_1 par exemple.

On peut déterminer cette dernière en fonction du temps par l'équation :

$$\frac{dt}{dq_1} = \frac{1}{\frac{\partial \psi}{\partial p_1}};$$

d'où :

$$dt = \frac{dq_1}{\frac{\partial \psi}{\partial p_1}},$$

et, en intégrant,

$$t - t_0 = \int_{q_1^0}^{q_1} \frac{dq_1}{\frac{\partial \psi}{\partial p_1}}.$$

En résolvant cette dernière équation par rapport à q_1, on a cette variable en fonction de $t - t_0$. Mais, toutes les variables étant déjà exprimées en fonction de q_1, elles dépendent toutes de la différence $t - t_0$. Donc, la fonction V renfermera aussi ces deux quantités t et t_0 par leur différence $t - t_0 = \theta$.

On a donc :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial t_0} = \frac{\partial V}{\partial \theta}.$$

Mais, si l'on change $t, q_1, q_2, \dots q_k$ en leurs valeurs initiales $t_0, q_1^0, q_2^0, \dots q_k^0$, V se transforme en $-$V, θ en $-\theta$, et $\frac{\partial V}{\partial \theta}$ ne change pas.

Si l'on désigne par ψ_0, la valeur dans laquelle ψ se transforme lorsque les quantités q_i et $p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}$ se changent en q_i^0 et $p_i^0 = \frac{\partial V}{\partial q_i^0}$, l'équation :

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t} + \psi = \frac{\partial V}{\partial \theta} + \psi,$$

se transforme en la suivante :

$$0 = \frac{\partial V}{\partial \theta} + \psi_0 = -\frac{\partial V}{\partial t_0} + \psi_0.$$

Or, l'équation :

$$\frac{\partial V}{\partial t_0} - \psi_0 = 0,$$

est la deuxième équation d'Hamilton, et l'on voit qu'elle se déduit de la première par le changement des variables en leurs valeurs initiales.

VI.

Théorème sur les déterminants fonctionnels.

50. Avant d'aller plus loin, nous devons démontrer un théorème dû à Jacobi sur les déterminants fonctionnels, et dont nous ferons souvent usage.

Soient $f_1, f_2, \dots f_n$, n fonctions des n variables $x_1, x_2, \dots x_n$,

$$\begin{aligned} f_1 &= \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ f_2 &= \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\dots\dots\dots \\ f_n &= \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned}$$

et soit le déterminant fonctionnel :

$$R = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Il est facile de démontrer que, *si le déterminant* R *est identiquement nul, les fonctions qui entrent dans sa formation ne sont pas indépendantes les unes des autres; une ou plusieurs d'entre elles peuvent s'exprimer au moyen des autres* (*).

(*) Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*, p. 102.

De l'une des équations contenant x_1, par exemple la première, tirons la valeur de x_1 en fonction de f_1, x_2, ... x_n, et substituons dans une des autres équations renfermant x_1, x_2, par exemple la seconde : nous aurons f_2 en fonction de $f_1, x_2, x_3, \ldots x_n$. Cette équation nous donnera x_2 en fonction de $f_1, f_2, x_3, \ldots x_n$, et alors nous aurons f_3 en fonction de $f_1, f_2, x_3, \ldots x_n$, et ainsi de suite.

Nous pouvons donc considérer :

f_1 comme une fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$,
f_2 » » $f_1, x_2, \ldots, x_n$,
f_3 » » $f_1, f_2, x_3, \ldots, x_n$,
. . . .
f_n » » $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, x_n$,

et nous aurons :

$$f_1 = \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$f_2 = \psi_2(f_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$f_3 = \psi_3(f_1, f_2, x_3, \ldots, x_n),$$
. . . .
$$f_i = \psi_i(f_1, f_2, \ldots, f_{i-1}, x_i, \ldots, x_n).$$
. . . .

Il est évident que l'on retrouvera les valeurs primitives de $f_1, f_2, \ldots f_n$, en $x_1, x_2, \ldots x_n$, si l'on remplace successivement dans les seconds membres $f_1, f_2, \ldots$ par leurs valeurs déduites des équations qui précèdent celle que l'on considère.

Nous aurons donc, en différentiant :

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \psi_i}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \frac{\partial \psi_i}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_k} + \cdots + \frac{\partial \psi_i}{\partial f_{i-1}}\frac{\partial f_{i-1}}{\partial x_k} + \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k}.$$

Observons que $\frac{\partial \psi_i}{\partial x_k}$ est la dérivée partielle par rapport à x_k de $f_i = \psi_i$, considérée comme fonction de $f_1, f_2, \ldots f_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots x_n$, c'est-à-dire dans la deuxième hypothèse, tandis que $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ est la dérivée partielle, par rapport à x_k de $f_i = \varphi_i$, considérée comme fonction de $x_1, x_2, \ldots x_n$, c'est-à-dire dans la première hypothèse.

On tire de là :

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial\psi_i}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_k} - \frac{\partial\psi_i}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_k} - \dots - \frac{\partial\psi_i}{\partial f_{i-1}}\frac{\partial f_{i-1}}{\partial x_k} + \frac{\partial f_i}{\partial x_k}.$$

Cette équation nous donne successivement :

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial x_n} = \frac{\partial f_1}{\partial x_n};$$

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial\psi_2}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0,$$

puisque ψ_2 ne renferme pas explicitement la variable x_1.

De même,

$$\frac{\partial\psi_3}{\partial x_1} = -\frac{\partial\psi_3}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi_3}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = 0,$$

et ainsi de suite.

Elle nous donne aussi :

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} = -\frac{\partial\psi_2}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial x_3} = -\frac{\partial\psi_2}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_3} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3},$$

et ainsi de suite;

$$\frac{\partial\psi_3}{\partial x_2} = -\frac{\partial\psi_3}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi_3}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = 0,$$

puisque ψ_3 ne contient pas explicitement la variable x_2.

On a aussi :

$$\frac{\partial\psi_3}{\partial x_3} = -\frac{\partial\psi_3}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial\psi_3}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3},$$

et ainsi de suite.

Il résulte de là que, si nous écrivons le déterminant :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} & \frac{\partial \psi_3}{\partial x_3} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_n} & \frac{\partial \psi_3}{\partial x_n} & & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

nous pourrons le considérer comme le produit du déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\partial \psi_2}{\partial f_1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\partial \psi_3}{\partial f_1} & -\frac{\partial \psi_3}{\partial f_2} & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{\partial \psi_n}{\partial f_1} & -\frac{\partial \psi_n}{\partial f_2} & -\frac{\partial \psi_n}{\partial f_3} & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

par le déterminant fonctionnel :

$$R = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \frac{\partial f_3}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Or, le premier de ces trois déterminants se réduit à son premier terme

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial\psi_n}{\partial x_n},$$

et le second est égal à l'unité.

On a donc :

$$R=\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial\psi_n}{\partial x_n}. \qquad (A)$$

Cela posé, si le déterminant fonctionnel R des fonctions $f_1, f_2, \ldots f_n$ est identiquement nul, la formule (A) nous permet de démontrer que les fonctions f ne sont pas indépendantes les unes des autres.

En effet, si $R=0$, il faut que l'un des facteurs :

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1},\quad\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2},\quad\cdots\quad\frac{\partial\psi_n}{\partial x_n},$$

s'annule identiquement.

Mais, les $n-1$ premiers facteurs sont, en général, différents de zéro, puisque, par hypothèse, ψ_1 contient explicitement x_1, ψ_2 contient x_2, etc. Il faut donc que ce soit le dernier facteur $\frac{\partial\psi_n}{\partial x_n}$ qui s'annule identiquement, c'est-à-dire que, par suite des substitutions successives que l'on a faites, la dernière fonction ψ_n ou f_n ne doit plus renfermer x_n explicitement, et peut, par conséquent, s'exprimer au moyen de $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$ seulement. Il s'ensuit donc que, si $R=0$, il doit exister entre $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, f_n$ une relation indépendante de $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Cependant, il peut aussi se faire que, par suite des substitutions en question, aucune des fonctions $\psi_n, \psi_{n-1}, \ldots \psi_{n-k}$, ne renferme explicitement $x_n, x_{n-1}, \ldots x_{n-k}$. Il est évident que, dans ce cas, l'on aura identiquement :

$$\frac{\partial\psi_n}{\partial x_n}=0,\quad\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}=0,\quad\cdots\quad\frac{\partial\psi_{n-k}}{\partial x_{n-k}}=0, \qquad (B)$$

et alors chacune des fonctions $\psi_n, \psi_{n-1}, \dots \psi_{n-k}$, ou $f_n, f_{n-1}, \dots f_{n-k}$ s'exprime au moyen de $f_1, f_2, \dots f_{n-k-1}$ seulement.

Réciproquement, si les fonctions $f_1, f_2, \dots f_n$ ne sont pas indépendantes les unes des autres, si, par exemple, l'une d'entre elles f_n, ou plusieurs d'entre elles $f_n, f_{n-1}, \dots f_{n-k}$, peuvent être exprimées au moyen des fonctions restantes, c'est-à-dire f_n en fonction de $f_1, f_2, \dots f_{n-1}$, ou bien $f_n, f_{n-1}, \dots f_{n-k}$ en fonction de $f_1, f_2, \dots f_{n-k-1}$, alors la première des égalités (B), ou toutes ces égalités (B) auront lieu, et, par suite, le déterminant R sera identiquement nul.

VII.

Théorème de Jacobi.

51. Nous avons vu (n° **41**) que la connaissance des intégrales du système d'équations différentielles ordinaires :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial p_i},$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \psi}{\partial q_i},$$

nous a permis de trouver par une quadrature une solution complète de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0.$$

Nous allons maintenant démontrer le théorème inverse, et faire voir comment, au moyen de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre, on peut, par de simples différentiations, trouver les intégrales des équations différentielles ordinaires.

THÉORÈME. — *Soit :*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0, \qquad (1)$$

une équation différentielle partielle du premier ordre, qui ne renferme pas la fonction V, *la fonction* ψ *étant une fonction de* $q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n, t$, *dans laquelle :*

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}.$$

Supposons que l'on connaisse une solution complète quelconque V *de cette équation différentielle partielle, c'est-à-dire une solution qui, outre la constante ajoutée, renferme* n *constantes arbitraires* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$. *Si l'on pose :*

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_n} = \beta_n, \tag{2}$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ *étant de nouvelles constantes arbitraires, ces équations, jointes aux suivantes :*

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial q_n} = p_n, \tag{3}$$

seront les intégrales du système d'équations différentielles ordinaires dont le type est :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial \psi}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial \psi}{\partial q_i}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

pour toutes les valeurs de i *égales à* 1, 2, ... n.

Pour démontrer ce théorème, observons d'abord que, si l'on remplace dans l'équation (1) V par la solution complète supposée connue, le premier membre de cette équation deviendra une fonction identiquement nulle des quantités $q_1, q_2, \ldots q_n$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, t. Par suite, les dérivées de ce premier membre, prises par rapport aux q_i ou aux α_i, sont identiquement nulles.

Cela posé, nous allons démontrer que les équations (4) sont des conséquences des équations (2) et (3). Nous démontrerons d'abord que des équations (2) on peut déduire la première moitié

des équations (4). A cet effet, nous différentierons complètement les équations (2) par rapport à t, et nous aurons :

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1\partial t}+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1\partial q_1}\frac{dq_1}{dt}+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1\partial q_2}\frac{dq_2}{dt}+\cdots+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1\partial q_n}\frac{dq_n}{dt}=0,\\ \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\partial t}+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\partial q_1}\frac{dq_1}{dt}+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\partial q_2}\frac{dq_2}{dt}+\cdots+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\partial q_n}\frac{dq_n}{dt}=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_n\partial t}+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_n\partial q_1}\frac{dq_1}{dt}+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_n\partial q_2}\frac{dq_2}{dt}+\cdots+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_n\partial q_n}\frac{dq_n}{dt}=0.\end{array}\right\}\quad(5)$$

Il suffirait de résoudre ces équations linéaires par rapport à $\frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}, \ldots \frac{dq_n}{dt}$, et de montrer que les valeurs obtenues sont identiques à $\frac{\partial\psi}{\partial p_1}, \frac{\partial\psi}{\partial p_2}, \ldots \frac{\partial\psi}{\partial p_n}$.

Mais, on peut démontrer cette identité très facilement, sans résoudre les équations (5), si l'on parvient à reconnaître que les quantités $\frac{\partial\psi}{\partial p_1}, \frac{\partial\psi}{\partial p_2}, \ldots \frac{\partial\psi}{\partial p_n}$, d'une part, et les quantités $\frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}, \ldots \frac{dq_n}{dt}$, d'autre part, satisfont à un même système d'équations linéaires.

A cet effet, différentions partiellement l'équation (1) par rapport aux constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, en observant que, parmi les quantités t, q_i et $p_i=\frac{\partial V}{\partial q_i}$, qui entrent dans ψ, il n'y a que les p_i qui renferment les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$. En différentiant partiellement par rapport à α_i, il vient :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t\partial\alpha_i}+\frac{\partial\psi}{dp_1}\frac{\partial p_1}{\partial\alpha_i}+\frac{\partial\psi}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial\alpha_i}+\cdots+\frac{\partial\psi}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial\alpha_i}=0;$$

mais, en vertu de la relation :

$$p_k=\frac{\partial V}{\partial q_k},$$

on a :

$$\frac{\partial p_k}{\partial\alpha_i}=\frac{\partial^2 V}{\partial q_k\partial\alpha_i}.$$

Par suite, l'équation précédente devient :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t\partial\alpha_i}+\frac{\partial\psi}{\partial p_1}\frac{\partial^2 V}{\partial q_1\partial\alpha_i}+\frac{\partial\psi}{\partial p_2}\frac{\partial^2 V}{\partial q_2\partial\alpha_i}+\cdots+\frac{\partial\psi}{\partial p_n}\frac{\partial^2 V}{\partial q_n\partial\alpha_i}=0.$$

En donnant successivement à i les valeurs 1, 2, ... n, on en déduit un système de n équations linéaires. Or, ce système ne diffère de (5) qu'en ce que les quantités $\frac{dq_i}{dt}$ sont remplacées par $\frac{\partial\psi}{\partial p_i}$. On en conclut donc :

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial\psi}{\partial p_i}.$$

Pour obtenir la seconde moitié des équations (4), nous nous servirons de la seconde moitié des équations intégrales, c'est-à-dire des équations :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i}=p_i.$$

En différentiant par rapport à t, il vient :

$$\frac{dp_i}{dt}=\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial t}+\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial q_1}\frac{dq_1}{dt}+\dots+\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial q_n}\frac{dq_n}{dt}.$$

Or, on a :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial q_k}=\frac{\partial\frac{\partial V}{\partial q_k}}{\partial q_i}=\frac{\partial p_k}{\partial q_i};$$

par conséquent,

$$\frac{dp_i}{dt}=\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial t}+\frac{\partial p_1}{dq_i}\frac{dq_1}{dt}+\dots+\frac{\partial p_n}{\partial q_i}\frac{dq_n}{dt}.$$

Mais, en vertu de la première moitié des équations (4), on a :

$$\frac{dq_1}{dt}=\frac{\partial\psi}{\partial p_1},\quad\dots\quad\frac{dq_n}{dt}=\frac{\partial\psi}{\partial p_n};$$

donc,

$$\frac{dp_i}{dt}=\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial t}+\frac{\partial p_1}{\partial q_i}\frac{\partial\psi}{\partial p_1}+\frac{\partial p_2}{\partial q_i}\frac{\partial\psi}{\partial p_2}+\dots+\frac{\partial p_n}{\partial q_i}\frac{\partial\psi}{\partial p_n}.\qquad(6)$$

D'autre part, en différentiant l'équation (1) partiellement par rapport à q_i, il vient, puisque ψ renferme q_i, d'abord explicitement, et implicitement par les p_i :

$$0=\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial q_i}+\frac{\partial\psi}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial q_i}+\dots+\frac{\partial\psi}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial q_i}+\frac{\partial\psi}{\partial q_i}.\qquad(7)$$

Retranchant l'équation (7) de l'équation (6), il vient :

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial\psi}{\partial q_i},$$

ce qui démontre la seconde moitié des équations (4), et le théorème de Jacobi est démôntré.

On voit, par la démonstration précédente, que les n constantes qui entrent dans V peuvent être arbitraires : il n'est donc pas nécessaire de prendre pour ces constantes les valeurs initiales $q_1^0, q_2^0, \ldots q_n^0$.

52. *Remarque.* — Nous avons conclu de l'identité des deux systèmes qui définissent $\frac{dq_i}{dt}$ et $\frac{\partial\psi}{\partial p_i}$, que ces quantités sont égales. Nous ne pouvons tirer cette conclusion que si ces quantités ont des valeurs finies et déterminées; or, cela a toujours lieu pour un système d'équations linéaires, dès que ces équations ne sont pas incompatibles, ou dès que l'une ou plusieurs d'entre elles ne sont pas la conséquence des autres. Dans le premier cas, les valeurs des quantités sont infinies; dans le second cas, elles sont indéterminées. Ces cas d'exception, dans lesquels notre démonstration cesse d'avoir lieu, se présentent lorsque le déterminant R des équations linéaires est nul (pourvu que les coefficients de ces équations restent finis, ce que nous supposons toujours).

Or, ce déterminant est :

$$R = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1 \partial q_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1 \partial q_2} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1 \partial q_n} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2 \partial q_2} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2 \partial q_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_n \partial q_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_n \partial q_2} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_n \partial q_n} \end{vmatrix},$$

que l'on peut écrire, en adoptant la notation de Jacobi :

$$R = \sum \pm \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial\alpha_1}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial\alpha_2}}{\partial q_2} \cdots \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial\alpha_n}}{\partial q_n},$$

ou bien :

$$R = \sum \pm \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial q_1}}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial q_2}}{\partial \alpha_2} \cdots \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial q_n}}{\partial \alpha_n}.$$

Or, c'est un *déterminant fonctionnel,* et nous allons démontrer qu'il ne peut être nul.

En effet, si le déterminant R est nul, il résulte de la première expression de R que les quantités $\frac{\partial V}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial V}{\partial \alpha_2}, \ldots \frac{\partial V}{\partial \alpha_n}$, considérées comme des fonctions de $q_1, q_2, \ldots q_n$, ne seraient pas indépendantes les unes des autres, c'est-à-dire qu'il devrait exister une relation entre $\frac{\partial V}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial V}{\partial \alpha_2}, \ldots \frac{\partial V}{\partial \alpha_n}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, t$, laquelle ne renfermerait pas $q_1, q_2, \ldots q_n$ (n° **50**). De la deuxième expression de R, il résulte qu'il devrait exister une relation entre $\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_n}, q_1, q_2, \ldots q_n, t$, laquelle ne renfermerait pas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$.

On aurait donc ainsi une équation de la forme :

$$F\left(t, q_1, q_2, \ldots q_n, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) = 0,$$

c'est-à-dire une équation différentielle partielle du premier ordre, à laquelle devrait satisfaire la solution V supposée, et cette équation ne renferme pas $\frac{\partial V}{dt}$. Mais, cela est impossible, si V est une *solution complète* de l'équation différentielle partielle :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0.$$

En effet, pour qu'une expression :

$$V = f(t, q_1, q_2, \ldots q_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) + \gamma,$$

satisfasse à la condition d'être une *solution complète,* on doit se servir, pour éliminer les $n+1$ constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \gamma$ de toutes les $n+1$ équations

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial q_n} = \frac{\partial f}{\partial q_n}.$$

Or, s'il existe entre $\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_n}, q_1, q_2, \ldots q_n, t$, une relation qui ne renferme pas les $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, et qui ne contienne pas $\frac{\partial V}{dt}$, c'est-à-dire une équation de la forme :

$$F\left(t, q_1, q_2, \ldots q_n, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \ \ldots \ \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) = 0,$$

il en résulte que pour éliminer les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \gamma$, on n'a pas fait usage de l'une des équations, à savoir de l'équation :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Si l'une des équations est superflue, et si, par conséquent, les n autres :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{\partial f}{\partial q_i},$$

sont seules nécessaires pour éliminer les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, il en résultera que l'une de ces constantes reste indéterminée, c'est-à-dire que nous pourrons lui donner une valeur particulière. En effet, entre n équations on ne peut éliminer, en général, que $n-1$ quantités. Cette constante est donc superflue, et, par conséquent, la fonction f ne renferme que $n-1$ constantes.

Par suite, la fonction :

$$V = f + \gamma,$$

ne renferme, y compris γ, que n constantes arbitraires. Elle ne peut donc être une solution complète de l'équation :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0,$$

mais, elle est une solution de l'équation :

$$F = 0.$$

Or, cette dernière conclusion est contraire à notre hypothèse qui était que :

$$V = f + \gamma,$$

est une solution de l'équation :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0,$$

et de l'équation :

$$F = 0.$$

Donc, le déterminant R ne peut être nul, et, par suite, de l'identité des deux systèmes linéaires, on a pu conclure que l'on a :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial p_i}.$$

53. *Application.* — Nous terminerons ce chapitre, en appliquant la théorie précédente au ***mouvement d'un système libre de*** n ***points matériels.***

On doit d'abord calculer l'expression :

$$\psi = T - U,$$

qui entre dans les équations différentielles d'Hamilton, en fonction de t, q_i, p_i.

Or, ici les q_i sont les $3n$ coordonnées rectangulaires x_i, y_i, z_i. On a donc :

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2);$$

par suite,

$$p = \frac{\partial T}{\partial q'} = \frac{\partial T}{\partial x_i'} = m_i x_i'.$$

Les p étant ici égaux à $m_i x_i'$, $m_i y_i'$, $m_i z_i'$, on devra dans l'équation

$$\psi = T - U,$$

remplacer les x_i', y_i', z_i' (c'est-à-dire les q') par $\frac{p}{m_i}$, et l'on aura ψ en fonction de q_i, p_i et t.

Mais, pour avoir l'équation différentielle partielle, on devra poser :

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i};$$

par conséquent,

$$m_i x_i' = \frac{\partial V}{\partial x_i},$$

$$m_i y_i' = \frac{\partial V}{\partial y_i},$$

$$m_i z_i' = \frac{\partial V}{\partial z_i},$$

et, par suite,

$$T = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{m_i} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2 \right].$$

On a donc l'équation différentielle partielle :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum \frac{1}{m_i} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2 \right] = U,$$

U étant une fonction des coordonnées x_i, y_i, z_i.

Telle est l'équation différentielle partielle du premier ordre, de la solution de laquelle dépend l'intégration des équations différentielles du mouvement d'un système libre, lorsqu'il existe une fonction de force U, qui, outre les coordonnées, peut encore contenir explicitement le temps.

Si l'on peut déterminer une solution complète de cette équation, c'est-à-dire une solution qui, outre la constante additive, renferme $3n$ constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{3n}$, alors les équations :

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = \beta_i,$$

pour $i = 1, 2, \ldots 3n$, seront les intégrales du mouvement.

Les équations du mouvement pourront être mises sous la forme :

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

pour $i = 1, 2, \ldots$ n.

Quant aux intégrales premières, elles sont données par les équations :

$$m_i \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{dz_i}{dt} = \frac{\partial V}{\partial z_i}.$$

VIII.

Fonction caractéristique d'Hamilton.

54. Nous avons vu, dans le cas d'un problème de mécanique auquel le principe des forces vives est applicable, que, T étant la demi-somme des forces vives, et U la fonction de force ne *renfermant pas explicitement le temps,* l'équation des forces vives :

$$T - U = H = const. = h,$$

est une intégrale du problème (n° **17**).

Nous savons aussi que, dans ce cas, l'équation différentielle partielle du premier ordre, à laquelle satisfait la fonction V, est :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = \frac{\partial V}{\partial t} + T\left(q_1, q_2, \dots q_n, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) - U(q_1, q_2, \dots q_n) = 0, \quad (1)$$

ou bien :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(q_1, q_2, \dots q_n, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) = 0.$$

Outre la fonction principale V, Hamilton considère une autre fonction S définie par l'équation :

$$S = V + H(t - t_0). \quad (2)$$

Cette fonction S jouit de propriétés analogues à celles de la fonction V, et elle peut être substituée à cette dernière avec avantage.

55. Nous allons d'abord démontrer que *la fonction* S *ne renferme pas explicitement le temps.*

En effet, de la formule (2) on tire :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} + H.$$

Or, lorsqu'il existe une fonction de force indépendante du temps, on a :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0,$$

par suite,

$$\frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

et, par conséquent, S ne renferme pas explicitement le temps.

56. Ceci posé, prenons la variation de S, nous aurons :

$$\delta S = \delta V + (t - t_0)\delta H + H\delta t,$$

d'où, en remplaçant δV par sa valeur :

$$\delta V = p_1\delta q_1 + p_2\delta q_2 + \ldots + p_n\delta q_n$$
$$- p_1^0\delta q_1^0 - p_2^0\delta q_2^0 - \ldots - p_n^0\delta q_n^0 + \frac{\partial V}{\partial t}\delta t,$$

et observant que :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = - H,$$

il vient :

$$\delta S = p_1\delta q_1 + p_2\delta q_2 + \cdots + p_n\delta q_n$$
$$- p_1^0\delta q_1^0 - p_2^0\delta q_2^0 - \ldots - p_n^0\delta q_n^0 + (t - t_0)\delta H.$$

Si donc on considère S comme une fonction de $q_1, \ldots q_n$, $q_1^0, \ldots q_n^0$ et de H (*), après avoir éliminé le temps t au moyen de l'équation $H = T - U$, on aura les $2n+1$ équations suivantes :

$$\frac{\partial S}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial S}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial S}{\partial q_n} = p_n,$$
$$\frac{\partial S}{\partial q_1^0} = - p_1^0, \quad \frac{\partial S}{\partial q_2^0} = - p_2^0, \quad \ldots \quad \frac{\partial S}{\partial q_n^0} = - p_n^0, \quad \frac{\partial S}{\partial H} = t - t_0,$$

lesquelles donneront la solution du problème, lorsque la fonction S sera connue.

Or, il est facile de voir que la fonction S satisfait à une équation différentielle partielle plus simple que celle à laquelle satisfait la fonction V.

(*) La fonction $S = V + H(t - t_0)$, mise sous cette forme, paraît renfermer explicitement le temps. Nous avons démontré qu'elle ne le contient pas. Si donc on veut la considérer comme une fonction des q_i, q_i^0 et de H, on devra éliminer t au moyen de l'équation $H = T - U$.

En effet, on a l'équation :

$$T - U = H,$$

dans laquelle T est une fonction de $q_1, \ldots q_n, p_1, \ldots p_n$, et, en remplaçant p_i par $\frac{\partial S}{\partial q_i}$, on a l'équation :

$$T\left(q_1, \ldots q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots \frac{\partial S}{\partial q_n}\right) - U(q_1, \ldots q_n) = H. \qquad (3)$$

Or, cette équation différentielle partielle du premier ordre, qui ne renferme pas la fonction inconnue S, est plus simple que la précédente (1).

57. Propriété. — La fonction S n'est autre que l'intégrale définie :

$$S = \int_{t_0}^{t} 2T\,dt,$$

que l'on considère dans le *principe de la moindre action.*

En effet, on a :

$$S = V + H(t - t_0);$$

or,

$$V = \int_{t_0}^{t} (T + U)\,dt;$$

par conséquent,

$$S = \int_{t_0}^{t} (T + U)\,dt + H(t - t_0).$$

Puisque H reste constante pendant toute la durée du mouvement, on aura :

$$S = \int_{t_0}^{t} (T + U)\,dt + \int_{t_0}^{t} H\,dt = \int_{t_0}^{t} (T + U + H)\,dt,$$

et, en remplaçant H par sa valeur T — U,

$$S = \int_{t_0}^{t} 2T\,dt.$$

On voit donc que la fonction principale d'Hamilton :

$$V = \int_{t_0}^{t} (T + U)\,dt,$$

ne diffère de la fonction S que l'on considère dans le principe de la moindre action que par l'addition d'un terme proportionnel au temps (n° **32**).

La fonction :

$$S = \int_{t_0}^{t} 2T\,dt,$$

a reçu d'Hamilton le nom de *fonction caractéristique.* Elle satisfait à l'équation différentielle partielle (3).

58. Il est facile de s'assurer que le théorème de Jacobi (n° **51**) peut être modifié de la manière suivante quand il existe une fonction de force ne renfermant pas explicitement le temps :

THÉORÈME. — *Si la fonction de force* U *ne renferme pas explicitement le temps, de telle manière que le principe des forces vives ait lieu, et si l'on remplace dans l'intégrale des forces vives :*

$$T - U = h, \qquad (h \text{ étant une constante})$$

laquelle est une des intégrales du problème, les quantités p_i *par* $\frac{\partial S}{\partial q_i}$, *on formera l'équation différentielle partielle :*

$$T\left(q_1, q_2 \ldots q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}\right) - U(q_1, q_2, \ldots q_n) = h.$$

Si l'on connaît une solution complète quelconque S *de cette équation, c'est-à-dire une solution qui, outre la constante additive, renferme les* $n - 1$ *constantes arbitraires* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$, *les intégrales du problème seront :*

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \cdots \frac{\partial S}{\partial \alpha_{n-1}} = \beta_{n-1}, \frac{\partial S}{\partial h} = t - t_0,$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-1}, t_0$ *étant de nouvelles constantes.*

Les intégrales premières étant :

$$\frac{\partial S}{\partial q_1} = p_1, \ \frac{\partial S}{\partial q_2} = p_2, \dots \frac{\partial S}{\partial q_n} = p_n,$$

nous aurons les 2n *intégrales du problème, et les constantes seront :*

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{n-1}, h,$$

$$\beta_1, \beta_2, \dots \beta_{n-1}, t_0.$$

En effet, on sait que la fonction V est une solution complète de l'équation différentielle partielle :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + T\left(q_1, q_2, \dots q_n, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) - U(q_1, q_2, \dots q_n) = 0. \quad (4)$$

Posons $V = S - ht$, S ne renfermant pas explicitement le temps. Il est évident que S étant connue, on en déduira V en retranchant ht de S.

Cherchons donc l'équation à laquelle satisfait la fonction S. A cet effet, nous allons transformer l'équation (4). On a :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -h, \ \frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{\partial S}{\partial q_i};$$

par conséquent, l'équation (4) se transforme en la suivante :

$$-h + T\left(q_1, q_2, \dots q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots \frac{\partial S}{\partial q_n}\right) - U(q_1, q_2, \dots q_n) = 0, \quad (5)$$

équation qui devra être vérifiée par la fonction S.

Si donc, on connaît une solution S de cette équation (5), on en déduira une solution V de (4) en retranchant ht de S.

Or, d'après le théorème de Jacobi, on sait que, si l'on connaît une solution V de (4), les intégrales des équations du mouvement sont données par les équations (n° 51) :

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = \beta_i.$$

Les intégrales des équations du mouvement sont donc données par les équations :

$$\frac{\partial(S-ht)}{\partial\alpha_1}=\beta_1,\ \frac{\partial(S-ht)}{\partial\alpha_2}=\beta_2,\ \cdots\ \frac{\partial(S-ht)}{\partial\alpha_{n-1}}=\beta_{n-1},$$

$$\frac{\partial(S-ht)}{\partial h}=-t_0,$$

ou bien :

$$\frac{\partial S}{\partial\alpha_1}=\beta_1,\ \frac{\partial S}{\partial\alpha_2}=\beta_2,\cdots\ \frac{\partial S}{\partial\alpha_{n-1}}=\beta_{n-1},\ \frac{\partial S}{\partial h}=t-t_0.$$

Par conséquent, ces dernières équations sont bien les intégrales des équations du mouvement.

59. *Remarque I.* — Dans le cas d'un système libre, on a, en coordonnées rectangulaires, l'équation différentielle partielle :

$$\frac{1}{2}\sum\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)^2\right]-U=h.$$

60. *Remarque II.* — La *fonction caractéristique* d'Hamilton :

$$S=\int_{t_0}^{t}2Tdt,$$

peut encore être mise sous une forme différente.

En effet, puisque T est une fonction homogène et du second degré des q'_i, on a :

$$2T=\frac{\partial T}{\partial q'_1}q'_1+\frac{\partial T}{\partial q'_2}q'_2+\cdots+\frac{\partial T}{\partial q'_n}q'_n;$$

d'où :

$$\begin{aligned}2T&=p_1q'_1+p_2q'_2+\cdots+p_nq'_n\\&=p_1\frac{dq_1}{dt}+p_2\frac{dq_2}{dt}+\cdots+p_n\frac{dq_n}{dt}.\end{aligned}$$

Par suite,

$$S=\int_{t_0}^{t}2Tdt=\int_{t_0}^{t}(p_1dq_1+p_2dq_2+\cdots+p_ndq_n).$$

Observons ici que l'expression $p_1dq_1+\cdots+p_ndq_n$ doit être

une différentielle exacte, puisque l'intégrale du second membre doit se réduire à une fonction de t seulement.

61. *Remarque III.* — Hamilton considère encore une autre fonction qui jouit de propriétés analogues à celles des fonctions V et S. Cette fonction est définie par l'équation :

$$Q = \int_{t_0}^{t} \left(H - \sum q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) dt,$$

dans laquelle $H = T - U$.

Or, H étant une fonction des q_i, p_i, on a :

$$\begin{aligned} \delta Q &= \int_{t_0}^{t} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial H}{\partial q_1} \delta q_1 + \cdots + \dfrac{\partial H}{\partial q_n} \delta q_n + \dfrac{\partial H}{\partial p_1} \delta p_1 + \cdots + \dfrac{\partial H}{\partial p_n} \delta p_n \\ - \sum \left(\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + q_i \delta \dfrac{\partial H}{\partial q_i} \right) \end{array} \right\} dt \\ &= \int_{t_0}^{t} \left\{ \sum \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - q_i \delta \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \right\} dt; \end{aligned}$$

mais, les équations canoniques :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$
$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

nous donnent :

$$\begin{aligned} \delta Q &= \int_{t_0}^{t} \sum \left(\frac{dq_i}{dt} \delta p_i + q_i \delta \frac{dp_i}{dt} \right) dt = \int_{t_0}^{t} \sum \frac{d(q_i \delta p_i)}{dt} dt \\ &= \sum (q_i \delta p_i - q_i^0 \delta p_i^0). \end{aligned}$$

Si donc on considère la fonction Q comme une fonction des $2n$ quantités p_i, p_i^0, nous aurons les $2n$ équations :

$$q_i = \frac{\partial Q}{\partial p_i},$$
$$q_i^0 = -\frac{\partial Q}{\partial p_i^0},$$

qui seront les intégrales des équations canoniques, et qui résoudront la question lorsque la fonction Q sera connue.

IX.

Applications.

62. ***Mouvement d'un point matériel attiré vers un centre fixe, par une force dont l'intensité varie en raison inverse du carré de la distance, le mouvement étant rapporté à deux axes rectangulaires.***

Les équations du mouvement sont, en prenant le centre fixe pour origine, et en supposant la masse du point égale à l'unité,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r^3},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{r^3},$$

μ étant la masse du centre d'action. Nous supposons que l'action de l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance est égale à l'unité.

La fonction de force est :

$$U = \frac{\mu}{r}.$$

Comme il n'y a pas d'équations de liaisons, les q_i sont les variables x et y. La demi-force vive est donnée par la formule :

$$T = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2);$$

or, on a :

$$\frac{\partial T}{\partial x'} = x', \quad \frac{\partial T}{\partial y'} = y',$$

par conséquent (n° **10**),

$$p_1 = x', \quad p_2 = y',$$

et, par suite,

$$T = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2).$$

C'est la fonction T exprimée en fonction de p_1, p_2, q_1, q_2.

La *fonction de force* U *étant indépendante du temps,* l'équation différentielle partielle de laquelle dépend la solution du problème est (n° **58**) :

$$T - U = h,$$

dans laquelle on remplacera p_1, p_2, par $\frac{\partial S}{\partial q_1}$, $\frac{\partial S}{\partial q_2}$, c'est-à-dire par $\frac{\partial S}{\partial x}$, $\frac{\partial S}{\partial y}$. Nous aurons donc l'équation :

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right] - \frac{\mu}{r} = h,$$

dont il faudra trouver une solution complète.

On simplifie la question en changeant de variables, et posant :

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

r et φ étant les nouvelles variables indépendantes.

Or, des équations précédentes on tire :

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}, \quad r^2 = x^2 + y^2,$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{\partial S}{\partial r} - \frac{y}{r^2}\frac{\partial S}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{y}{r}\frac{\partial S}{\partial r} + \frac{x}{r^2}\frac{\partial S}{\partial \varphi}.$$

L'équation aux dérivées partielles est alors :

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right] = \frac{\mu}{r} + h,$$

et nous aurons à déterminer une solution complète renfermant, outre la constante additive, une constante arbitraire (n° **58**).

Pour intégrer cette équation, nous observerons que S peut être considérée comme la somme de deux fonctions d'une seule variable chacune, savoir une fonction de r et une fonction de φ.

Nous poserons donc :

$$S = R + \Phi,$$

R étant une fonction de r, et Φ une fonction de φ, et nous aurons, en désignant par R' et Φ' les dérivées de R et Φ respectivement par rapport à r et φ :

$$\frac{1}{2}\left[R'^2 + \frac{1}{r^2}\Phi'^2\right] = \frac{\mu}{r} + h.$$

On peut satisfaire à cette équation en posant :

$$\frac{1}{2}\Phi'^2 = \beta,$$

$$\frac{1}{2}R'^2 + \frac{1}{r^2}\beta = \frac{\mu}{r} + h,$$

d'où l'on tire :

$$\Phi' = \sqrt{2\beta},$$

$$R' = \sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2h - \frac{2\beta}{r^2}},$$

et, en intégrant,

$$\Phi = \int d\varphi \sqrt{2\beta} = \varphi\sqrt{2\beta},$$

$$R = \int dr \sqrt{2h + \frac{2\mu}{r} - \frac{2\beta}{r^2}};$$

par conséquent, l'expression :

$$S = \int dr \sqrt{2h + \frac{2\mu}{r} - \frac{2\beta}{r^2}} + \varphi\sqrt{2\beta} + \gamma,$$

sera une solution complète de l'équation aux dérivées partielles.

Les intégrales du problème seront alors (n° **58**) :

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = k,$$

$$\frac{\partial S}{\partial h} = t + g,$$

k et g étant deux nouvelles constantes.

Nous aurons donc pour ces intégrales :

$$k = -\int \frac{dr}{r^2\sqrt{2h + \frac{2\mu}{r} - \frac{2\beta}{r^2}}} + \frac{\varphi}{\sqrt{2\beta}},$$

$$t + g = \int \frac{dr}{\sqrt{2h + \frac{2\mu}{r} - \frac{2\beta}{r^2}}},$$

dont la première peut être remplacée par l'équation :

$$k = -\int \frac{dr}{r^2\sqrt{2h + \frac{2\mu}{r} - \frac{2\beta}{r^2}}} + \frac{1}{\sqrt{2\beta}} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}.$$

63. ***Mouvement d'un point matériel attiré vers un centre fixe par une force agissant en raison inverse du carré de la distance, le mouvement étant rapporté à trois axes rectangulaires.***

Désignons par x, y, z les coordonnées du point attiré, dont nous supposons la masse égale à l'unité, l'origine étant au centre fixe, par f l'attraction exercée par l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance, et par μ la masse du centre d'action. Les équations différentielles du mouvement sont :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{f\mu x}{r^3} = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{f\mu y}{r^3} = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{f\mu z}{r^3} = 0.$$

Observons que les équations du mouvement auront la même forme, si nous supposons le centre mobile, comme cela arrive dans le cas du *mouvement relatif d'une planète unique autour du soleil,* en tenant compte de l'action de la planète sur le soleil.

Dans ce cas, comme on sait, μ est la somme des masses M et m du soleil et de la planète (*).

La fonction de force est :

$$U = \frac{f\mu}{r}.$$

Comme il n'y a pas d'équations de liaisons, les q_i sont les variables x, y, z. La demi-force vive est donnée par la formule :

$$T = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2);$$

or, on a :

$$\frac{\partial T}{\partial x'} = x', \quad \frac{\partial T}{\partial y'} = y', \quad \frac{\partial T}{\partial z'} = z',$$

par conséquent (n° **10**),

$$p_1 = x', \quad p_2 = y', \quad p_3 = z',$$

et, par suite,

$$T = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2).$$

C'est la fonction T exprimée en fonction de $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$.

La *fonction de force* U *étant indépendante du temps*, l'équation différentielle partielle de laquelle dépend la solution du problème est (n° **58**) :

$$T - U = h,$$

dans laquelle on remplacera p_1, p_2, p_3 par $\frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \frac{\partial S}{\partial q_3}$, c'est-à-dire par $\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}, \frac{\partial S}{\partial z}$. Nous aurons donç l'équation :

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] - \frac{f\mu}{r} = h, \qquad (1)$$

équation dont il faudra trouver une solution complète, renfermant deux constantes arbitraires, outre la constante additive (n° **58**).

D'ailleurs, si nous posons :

$$H_1 = T - U = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) - \frac{f\mu}{r},$$

(*) Voir *Cours de mécanique analytique, théorie des forces centrales.*

les équations du mouvement peuvent être mises sous la forme suivante (*) :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial x'}, \quad \frac{dx'}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial x},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial y'}, \quad \frac{dy'}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial y},$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial z'}, \quad \frac{dz'}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial z}.$$

Pour simplifier la solution de la question, nous emploierons les coordonnées polaires, et nous poserons :

$$\left.\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi, \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi, \\ z &= r\cos\theta. \end{aligned}\right\}$$

Posons encore :

$$\frac{dr}{dt} = r', \quad \frac{d\theta}{dt} = \theta', \quad \frac{d\varphi}{dt} = \varphi',$$

et nous aurons pour l'expression de la force vive :

$$2T = r'^2 + r^2\theta'^2 + r^2\sin^2\theta . \varphi'^2;$$

c'est la fonction T exprimée en fonction des q et des q'.

Nous aurons donc :

$$\frac{\partial T}{\partial r'} = r',$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'} = r^2\theta',$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = r^2\sin^2\theta . \varphi';$$

(*) En observant que l'on a :

$$x' = \frac{\partial T}{\partial x'} = \frac{\partial (T - U)}{\partial x'} = \frac{\partial H_1}{\partial x'},$$

et

$$\frac{\partial H_1}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x}.$$

par conséquent (n° **10**),

$$p_1 = r', \quad p_2 = r^2\theta', \quad p_3 = r^2 \sin^2\theta . \varphi' ;$$

et il vient alors :

$$T = \frac{1}{2}\left[p_1^2 + \frac{1}{r^2} p_2^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} p_3^2\right].$$

C'est la fonction T exprimée en fonction de $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$.

L'équation différentielle partielle du problème est donc :

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right] = \frac{f\mu}{r} + h, \qquad (2)$$

et nous aurons à trouver une solution complète de cette équation (2), renfermant, outre la constante additive, deux constantes arbitraires (n° **58**).

Pour intégrer cette équation (2), nous observerons que S peut être considérée comme la somme de trois fonctions d'une seule variable chacune, savoir une fonction de r, une fonction de θ, et une fonction de φ.

Nous poserons donc :

$$S = R + \Theta + \Phi,$$

et nous aurons, en désignant par R', Θ', Φ' les dérivées de R, Θ, Φ respectivement par rapport à r, θ, φ :

$$\frac{1}{2}\left[R'^2 + \frac{1}{r^2}\Theta'^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\Phi'^2\right] = \frac{f\mu}{r} + h.$$

On peut satisfaire à cette équation en posant :

$$\left.\begin{aligned} &\Phi' = g, \\ &\Theta'^2 + \frac{g^2}{\sin^2\theta} = b^2, \\ &R'^2 + \frac{b^2}{r^2} = \frac{2f\mu}{r} + 2h. \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

Ces équations ne contenant chacune qu'une seule variable, on en tire :

$$\Phi = g\varphi,$$

$$\Theta = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{b^2 - \frac{g^2}{\sin^2\theta}}\, d\theta,$$

$$R = \int_{r_0}^{r} \sqrt{\frac{2f\mu}{r} + 2h - \frac{b^2}{r^2}}\, dr;$$

par conséquent, l'expression :

$$S = g\varphi + \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{b^2 - \frac{g^2}{\sin^2\theta}}\, d\theta + \int_{r_0}^{r} \sqrt{\frac{2f\mu}{r} + 2h - \frac{b^2}{r^2}}\, dr + \gamma, \qquad (3)$$

sera une solution complète de l'équation (2).

Les intégrales premières du problème sont alors (n° 58) :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= \frac{\partial S}{\partial r},\\
\frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial S}{\partial \theta},\\
\frac{d\varphi}{dt} &= \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial S}{\partial \varphi} = \frac{g}{r^2\sin^2\theta}.
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Les intégrales finies sont :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial b} &= b',\\
\frac{\partial S}{\partial g} &= g',\\
\frac{\partial S}{\partial h} &= t + \tau,
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

b', g' et τ étant trois nouvelles constantes arbitraires.

Observons, en passant, que la fonction S donnée par l'équation (3) étant connue, on pourrait revenir aux variables x, y, z, et alors les intégrales (4) pourront être remplacées par les suivantes :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial S}{\partial y}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial S}{\partial z}.$$

Les équations (5) nous donnent :

$$g' = \varphi - \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{g \dfrac{d\theta}{\sin^2\theta}}{\sqrt{b^2 - \dfrac{g^2}{\sin^2\theta}}},$$

$$b' = -\int_{r_0}^{r} \frac{b\dfrac{dr}{r^2}}{\sqrt{\dfrac{2f\mu}{r} + 2h - \dfrac{b^2}{r^2}}} + \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{b d\theta}{\sqrt{b^2 - \dfrac{g^2}{\sin^2\theta}}},$$

$$t + \tau = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\dfrac{2f\mu}{r} + 2h - \dfrac{b^2}{r^2}}}.$$

Il est facile de trouver la signification des constantes.

La constante h n'est autre que la constante des forces vives, b est la constante des aires dans le plan de l'orbite, et g la constante des aires dans le plan des xy.

On a, en effet,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Or, des formules :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, \quad \cos\theta = \frac{z}{r},$$

on tire :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \sin\theta\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\theta\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} = \cos\theta,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta},$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{zx}{r^3\sin\theta} = \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r},$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r},$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} = -\frac{\sin\theta}{r}.$$

Par conséquent,

$$\frac{dx}{dt} = \sin\theta\cos\varphi\sqrt{\frac{2f\mu}{r} + 2h - \frac{b^2}{r^2}} + \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\sqrt{b^2 - \frac{g^2}{\sin^2\theta}} - \frac{g\sin\varphi}{r\sin\theta},$$

$$\frac{dy}{dt} = \sin\theta\sin\varphi\sqrt{\frac{2f\mu}{r} + 2h - \frac{b^2}{r^2}} + \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\sqrt{b^2 - \frac{g^2}{\sin^2\theta}} + \frac{g\cos\varphi}{r\sin\theta},$$

$$\frac{dz}{dt} = \cos\theta\sqrt{\frac{2f\mu}{r} + 2h - \frac{b^2}{r^2}} - \frac{\sin\theta}{r}\sqrt{b^2 - \frac{g^2}{\sin^2\theta}}.$$

Élevant au carré et ajoutant, on a :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{2f\mu}{r} + 2h;$$

c'est l'équation des forces vives; en faisant $t=0$, cette équation détermine la constante h en fonction de la vitesse initiale et de la distance initiale du point matériel au centre fixe.

D'autre part, il est facile de voir que l'on a :

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=g.$$

On en conclut que g est *la constante des aires dans le plan des* xy ou bien le *double de la vitesse aréolaire en projection sur le plan des* xy.

On trouve de même :

$$y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}=-\sin\varphi\sqrt{b^2-\frac{g^2}{\sin^2\theta}}-g\cos\varphi\cot\theta,$$

$$z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}=\cos\varphi\sqrt{b^2-\frac{g^2}{\sin^2\theta}}-g\sin\varphi\cot\theta.$$

Élevant au carré et ajoutant, il vient :

$$\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)^2$$
$$=g^2+b^2-\frac{g^2}{\sin^2\theta}+g^2\cot^2\theta=b^2.$$

Or, le premier membre est le carré du double de l'aire dans le plan de l'orbite, ou le carré du double de la vitesse aréolaire dans le plan de l'orbite. Par conséquent, *la constante* b *est la constante des aires dans le plan de l'orbite,* ou le *double de la vitesse aréolaire dans le plan de l'orbite.*

On peut encore dire que la constante b est l'axe du plan invariable, et g la projection de cet axe sur la normale au plan des xy, c'est-à-dire sur la normale à un plan fixe sur lequel on compte les longitudes.

Il résulte de là que, si i est l'inclinaison de l'orbite sur le plan fixe des xy, on a :

$$g=b\cos i.$$

Avant de passer à la recherche de la signification des constantes τ, b', g', nous allons déterminer les limites inférieures r_0 et θ_0 des intégrales qui entrent dans la fonction S.

Nous prendrons pour ces limites inférieures les valeurs de r et θ qui annulent les radicaux : il résulte évidemment des deux dernières formules (A) que ces valeurs de r et θ sont celles pour lesquelles on a : $dr = 0$, $d\theta = 0$, c'est-à-dire les valeurs pour lesquelles r et θ sont minimums.

Nous aurons donc pour déterminer la limite inférieure de r, l'équation :

$$-\frac{b^2}{r^2} + \frac{2f\mu}{r} + 2h = 0,$$

ou bien :

$$-b^2 + 2f\mu r + 2hr^2 = 0.$$

Or, en désignant par $2a$ et e le grand axe et l'excentricité de l'orbite elliptique, on a :

$$-\frac{f\mu}{h} = 2a, \quad -\frac{b^2}{2h} = a^2(1 - e^2),$$

ou bien :

$$-\frac{f\mu}{h} = 2a, \quad \frac{b^2}{f\mu} = a(1 - e^2) = p,$$

p étant le demi-paramètre.

Ces deux dernières équations déterminent les constantes h et b en fonction de a et de e.

La limite inférieure r_0 de r est donc donnée par la formule :

$$r_0 = a(1 - e).$$

Quant à la limite inférieure θ_0 de θ, elle est déterminée par l'équation :

$$b^2 - \frac{g^2}{\sin^2 \theta_0} = 0,$$

de laquelle on tire :

$$\sin \theta_0 = \frac{g}{b},$$

θ est l'angle que le rayon vecteur r fait avec l'axe des z.

D'ailleurs, en vertu de la formule :

$$g = b \cos i,$$

on a :

$$\sin \theta_0 = \cos i, \quad \text{ou bien :} \quad \theta_0 = \frac{\pi}{2} - i.$$

Passons maintenant à la recherche de la signification des constantes g', b' et τ.

Pour trouver la signification de g', prenons l'intégrale :

$$g' = \varphi - \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{g \dfrac{d\theta}{\sin^2 \theta}}{\sqrt{b^2 - \dfrac{g^2}{\sin^2 \theta}}},$$

et faisons dans cette équation :

$$\theta = \theta_0 = \frac{\pi}{2} - i;$$

l'intégrale du second membre est nulle (*), et l'on a :

$$g' = \varphi_0,$$

en désignant par φ_0 la valeur de φ correspondant à $\theta = \theta_0$.

Or, φ_0 est l'angle de l'axe des x avec la projection du rayon vecteur qui fait le plus petit angle θ_0 avec l'axe des z. Mais, l'inclinaison de ce rayon vecteur sur le plan des xy est la même que celle de l'orbite : il est donc perpendiculaire à la trace de l'orbite sur le plan des xy (c'est la ligne de plus grande pente de l'orbite); par conséquent, sa projection sur le plan des xy est perpendiculaire à cette trace. Donc, l'angle de cette projection avec Ox est égal à $\frac{\pi}{2}$, augmenté de l'angle de la trace avec Ox, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2}$ plus la longitude du nœud de l'orbite.

On a donc, en désignant par α la longitude du nœud ascendant de l'orbite :

$$g' = \frac{\pi}{2} + \alpha.$$

(*) Puisque les limites de l'intégrale sont égales.

Observons encore que l'équation :

$$g' = \varphi - \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{g \dfrac{d\theta}{\sin^2\theta}}{\sqrt{b^2 - \dfrac{g^2}{\sin^2\theta}}},$$

nous donne :

$$g' = \varphi + \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{g\, d \operatorname{cotg}\theta}{\sqrt{b^2 - g^2 - g^2 \operatorname{cotg}^2\theta}},$$

ou bien :

$$g' = \varphi + \left(\operatorname{arc\,sin} \frac{g \operatorname{cotg}\theta}{\sqrt{b^2 - g^2}}\right)_{\theta_0}^{\theta}.$$

Or, de la formule :

$$\sin\theta_0 = \frac{g}{b},$$

on tire :

$$\cos\theta_0 = \frac{\sqrt{b^2 - g^2}}{b},$$

et, par suite,

$$\operatorname{cotg}\theta_0 = \frac{\sqrt{b^2 - g^2}}{g}.$$

Par conséquent,

$$g' = \varphi + \operatorname{arc\,sin} \frac{g \operatorname{cotg}\theta}{\sqrt{b^2 - g^2}} - \frac{\pi}{2},$$

ou bien encore :

$$g' = \varphi - \operatorname{arc\,cos} \frac{g \operatorname{cotg}\theta}{\sqrt{b^2 - g^2}}.$$

Pour trouver la signification de la constante b', nous prendrons l'équation :

$$b' = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{b\,d\theta}{\sqrt{b^2 - \dfrac{g^2}{\sin^2\theta}}} - \int_{r_0}^{r} \frac{b \dfrac{dr}{r^2}}{\sqrt{\dfrac{2f\mu}{r} + 2h - \dfrac{b^2}{r^2}}}.$$

Si, dans cette équation, on fait :

$$r = r_0 = a(1 - e),$$

la seconde intégrale sera évidemment nulle, et il vient :

$$b' = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{b d\theta}{\sqrt{b^2 - \frac{g^2}{\sin^2\theta}}}.$$

Dans cette dernière formule, la limite inférieure θ_0 est la valeur minimum de θ, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2} - i$, et la limite supérieure θ est la valeur de θ correspondant au rayon vecteur $r_0 = a(1 - e)$, c'est-à-dire au rayon vecteur du périhélie.

D'ailleurs, si l'on remplace g par sa valeur :

$$g = b \cos i,$$

il vient :

$$b' = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{\sin^2\theta - \cos^2 i}} = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{\sin^2 i - \cos^2\theta}} = \left(\text{arc} \cos \frac{\cos\theta}{\sin i}\right)_{\theta_0}^{\theta}.$$

On a donc :

$$b' = \text{arc} \cos \frac{\cos\theta}{\sin i} - \text{arc} \cos \frac{\cos\theta_0}{\sin i}.$$

Or, à cause de la relation $\theta_0 = \frac{\pi}{2} - i$, on a :

$$\cos\theta_0 = \sin i;$$

par conséquent,

$$b' = \text{arc} \cos \frac{\cos\theta}{\sin i},$$

d'où l'on tire :

$$\cos\theta = \sin i \cos b'.$$

Cherchons à interpréter ce résultat, en ayant soin de remarquer que, dans cette formule, θ est l'angle que fait avec Oz le rayon vecteur mené du point O au périhélie. Imaginons une sphère ayant son centre à l'origine, et soient NP et NK les

intersections de cette sphère avec le plan de l'orbite et le plan des xy, N le nœud et P le périhélie (fig. 1).

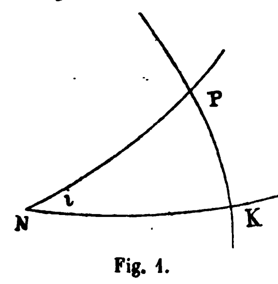


Fig. 1.

Du point P menons l'arc PK perpendiculaire à NK, c'est-à-dire au plan des xy. Il est évident que l'arc PK est le complément de l'angle que fait avec l'axe Oz le rayon vecteur mené du point O au périhélie, c'est-à-dire le complément de l'angle θ de la formule ci-dessus.

On a donc :

$$\text{PK} = \frac{\pi}{2} - \theta.$$

Or, le triangle sphérique PNK nous donne :

$$\sin \text{PK} = \sin \text{NP}. \sin i,$$

ou bien :

$$\cos \theta = \sin \text{NP}. \sin i.$$

Comparant cette formule avec la précédente, on a :

$$b' = \frac{\pi}{2} - \text{NP}.$$

Donc, la *constante* b' *est le complément de la distance angulaire du périhélie au nœud.*

Enfin, pour trouver la signification de la constante τ, faisons $r = r_0 = a(1 - e)$ dans la dernière équation :

$$t + \tau = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2f\mu}{r} + 2h - \frac{b^2}{r^2}}},$$

nous aurons :

$$t = -\tau.$$

Donc, la *constante* $-\tau$ *représente le temps du passage de la planète au périhélie.*

64. *Mouvement d'un point matériel pesant sur une sphère.*

Prenons pour axes la verticale dirigée dans le sens de la pesanteur et deux horizontales menées par le centre de la sphère. Les coordonnées du point M sont (fig. 2) :

$$x = \text{OQ}, \quad y = \text{PQ}, \quad z = \text{MP}.$$

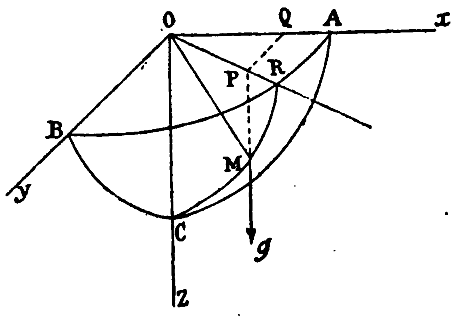


Fig. 2.

Remplaçons ces coordonnées par des variables q_1, q_2, telles que l'équation de condition soit vérifiée.

Soient :

$$q_1 = \text{AOR}, \quad q_2 = \text{MOR},$$

et supposons le rayon de la sphère égal à l'unité. Nous aurons :

$$x = \cos q_2 \cos q_1,$$

$$y = \cos q_2 \sin q_1,$$

$$z = \sin q_2.$$

Si nous supposons la masse du point égale à l'unité, nous aurons pour la fonction de force :

$$\text{U} = gz = g \sin q_2 ;$$

d'ailleurs, la demi-force vive T est donnée par la formule :

$$\text{T} = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

Or, on a :

$$x' = -\cos q_2 \sin q_1 . q'_1 - \sin q_2 \cos q_1 . q'_2,$$
$$y' = \cos q_2 \cos q_1 . q'_1 - \sin q_2 \sin q_1 . q'_2,$$
$$z' = \cos q_2 . q'_2;$$

d'où il vient pour la fonction T exprimée en fonction des q et des q' :

$$T = \frac{1}{2}(\cos^2 q_2 . q_1'^2 + q_2'^2).$$

On en tire :

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial q_2} = -\cos q_2 \sin q_2 . q_1'^2,$$
$$\frac{\partial T}{\partial q'_1} = \cos^2 q_2 . q'_1, \quad \frac{\partial T}{\partial q'_2} = q'_2.$$

On a d'ailleurs :

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} = g \cos q_2.$$

Par conséquent, les équations de Lagrange (n° 9) :

$$\frac{d . \frac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i},$$

nous donnent pour les équations du mouvement :

$$\frac{d(\cos^2 q_2 . q'_1)}{dt} = 0,$$
$$\frac{dq'_2}{dt} + \cos q_2 \sin q_2 . q_1'^2 = g \cos q_2.$$

De la première on tire :

$$q'_1 . \cos^2 q_2 = c,$$

d'où, en substituant dans la seconde, il vient :

$$\frac{dq'_2}{dt} + \sin q_2 . \frac{c^2}{\cos^3 q_2} = g \cos q_2,$$

ou bien :

$$\frac{d^2q_2}{dt^2} = g \cos q_2 - \frac{c^2 \sin q_2}{\cos^3 q_2}.$$

En intégrant, on a :

$$\left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2 = 2g \sin q_2 - \frac{c^2}{\cos^2 q_2} + c',$$

d'où :

$$dt = \frac{dq_2}{\sqrt{2g \sin q_2 - \frac{c^2}{\cos^2 q_2} + c'}}.$$

C'est l'équation que l'on obtient par la méthode ordinaire.

Appliquons maintenant le théorème de Jacobi, et, à cet effet, reprenons l'expression :

$$T = \frac{1}{2}(\cos^2 q_2 . q_1'^2 + q_2'^2),$$

et posons :

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial q_1'} = \cos^2 q_2 . q_1',$$

$$p_2 = \frac{\partial T}{\partial q_2'} = q_2';$$

d'où :

$$q_1' = \frac{p_1}{\cos^2 q_2},$$

$$q_2' = p_2.$$

Par conséquent,

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1^2}{\cos^2 q_2} + p_2^2\right).$$

C'est la fonction T exprimée en fonction de p_1, p_2, q_1, q_2.

La *fonction de force ne renfermant pas explicitement le temps,* l'équation différentielle partielle de laquelle dépend la solution du problème est (n° 58) :

$$T - U = h,$$

dans laquelle on remplacera p_1, p_2, par $\frac{\partial S}{\partial q_1}$, $\frac{\partial S}{\partial q_2}$, ce qui nous donne l'équation :

$$\frac{1}{2\cos^2 q_2}\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial q_2}\right)^2 - g\sin q_2 = h,$$

dont il faudra trouver une solution complète, renfermant, outre la constante additive, une constante arbitraire.

D'ailleurs, si nous posons :

$$H = T - U = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1^2}{\cos^2 q_2} + p_2^2\right) - g\sin q_2,$$

nous aurons :

$$\frac{\partial H}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial q_2} = \frac{p_1^2 \sin q_2}{\cos^3 q_2} - g\cos q_2,$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{\cos^2 q_2}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_2} = p_2,$$

et les équations du mouvement pourront être mises sous la forme :

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{p_1}{\cos^2 q_2}, \quad \frac{dq_2}{dt} = p_2,$$

$$\frac{dp_1}{dt} = 0, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{p_1^2 \sin q_2}{\cos^3 q_2} + g\cos q_2.$$

Pour intégrer l'équation aux dérivées partielles, nous observerons que S peut être considérée comme la somme de deux fonctions d'une seule variable chacune, savoir une fonction de q_1 et une fonction de q_2.

Posons donc :

$$S = Q_1 + Q_2,$$

et nous aurons, en désignant par Q_1', Q_2' les dérivées de Q_1, Q_2 respectivement par rapport à q_1, q_2 :

$$\frac{1}{2\cos^2 q_2} Q_1'^2 + \frac{1}{2} Q_2'^2 - g\sin q_2 = h.$$

On peut satisfaire à cette équation, en posant :

$$\frac{1}{2}Q_1'^2 = \beta,$$

$$\frac{1}{\cos^2 q_2}\beta + \frac{1}{2}Q_2'^2 - g\sin q_2 = h;$$

d'où l'on tire, puisque ces équations ne renferment chacune qu'une seule variable :

$$Q_1 = q_1\sqrt{2\beta},$$

$$Q_2 = \int dq_2 \sqrt{2h + 2g\sin q_2 - \frac{2\beta}{\cos^2 q_2}}.$$

Par conséquent, l'expression :

$$S = q_1\sqrt{2\beta} + \int dq_2 \sqrt{2h + 2g\sin q_2 - \frac{2\beta}{\cos^2 q_2}} + \gamma,$$

sera une solution complète de l'équation aux dérivées partielles.

Les intégrales du problème seront alors :

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = k,$$

$$\frac{\partial S}{\partial h} = t - t_0,$$

ou bien :

$$k = \frac{q_1}{\sqrt{2\beta}} - \int \frac{dq_2}{\cos^2 q_2 \sqrt{2h + 2g\sin q_2 - \frac{2\beta}{\cos^2 q_2}}},$$

$$t - t_0 = \int \frac{dq_2}{\sqrt{2h + 2g\sin q_2 - \frac{2\beta}{\cos^2 q_2}}}.$$

65. ***Mouvement d'un point matériel attiré par deux centres fixes en raison inverse des carrés des distances, le point se mouvant dans un plan passant par les deux centres.***

Prenons le centre O pour origine de deux axes rectangulaires, et soient a, b les coordonnées du second centre C. Le point mobile m est attiré vers le centre O par une force $\frac{\mu_1}{q_1^2}$, et par le centre C par une force $\frac{\mu_2}{q_2^2}$, en posant $Om = q_1$, et $Cm = q_2$.

La fonction de force est donc :

$$U = \frac{\mu_1}{q_1} + \frac{\mu_2}{q_2}.$$

La demi-somme des forces vives T a pour valeur :

$$T = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2).$$

Cherchons à exprimer T en fonction des variables q_1, q_2, et de leurs dérivées q_1', q_2'. On a :

$$x^2 + y^2 = q_1^2, \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = q_2^2;$$

d'où :

$$xx' + yy' = q_1 q_1', \quad (x-a)\,x' + (y-b)\,y' = q_2 q_2'.$$

On en tire :

$$x' = \frac{q_1 q_1'(y-b) - q_2 q_2' y}{ay - bx}, \quad y' = \frac{q_2 q_2' x - q_1 q_1'(x-a)}{ay - bx}.$$

Par conséquent,

$$T = \frac{1}{2}\,\frac{q_1^2 q_2^2 q_2'^2 + q_1^2 q_2^2 q_1'^2 - 2 q_1 q_2 q_1' q_2' \,\{y(y-b) + x(x-a)\}}{(ay-bx)^2};$$

or, si nous désignons par l la distance OC, on a :

$$2\left[y(y-b) + x(x-a)\right] = 2x^2 + 2y^2 - 2ax - 2by = q_1^2 + q_2^2 - l^2,$$

et, par suite,

$$T = \frac{1}{2}\,\frac{q_1^2 q_2^2 q_2'^2 + q_1^2 q_2^2 q_1'^2 - q_1 q_2 q_1' q_2'(q_1^2 + q_2^2 - l^2)}{4A^2},$$



puisque l'on a :

$$2A = ay - bx,$$

A étant l'aire du triangle OCm.

Mais, on a aussi :

$$A^2 = \frac{1}{16}(q_1 + q_2 + l)(q_1 + q_2 - l)(q_1 + l - q_2)(q_2 + l - q_1)$$
$$= \frac{1}{16}\left\{4q_1^2q_2^2 - (q_1^2 + q_2^2 - l^2)\right\};$$

d'où :

$$T = 2\,\frac{q_1^2q_2^2(q_1'^2 + q_2'^2) - q_1q_2q_1'q_2'(q_1^2 + q_2^2 - l^2)}{4q_1^2q_2^2 - (q_1^2 + q_2^2 - l^2)^2}.$$

C'est la valeur de T en fonction de q_1, q_2, q_1', q_2'.

Si nous posons :

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial q_1'}, \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial q_2'},$$

nous aurons :

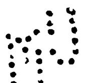
$$p_1 = 2\,\frac{2q_1^2q_2^2q_1' - q_1q_2q_2'(q_1^2 + q_2^2 - l^2)}{4q_1^2q_2^2 - (q_1^2 + q_2^2 - l^2)^2},$$
$$p_2 = 2\,\frac{2q_1^2q_2^2q_2' - q_1q_2q_1'(q_1^2 + q_2^2 - l^2)}{4q_1^2q_2^2 - (q_1^2 + q_2^2 - l^2)^2}.$$

En représentant le dénominateur par D, il vient :

$$q_1' = \frac{Dp_1q_1^2q_2^2 + \dfrac{Dp_2}{2}\,q_1q_2(q_1^2 + q_2^2 - l^2)}{4q_1^4q_2^4 - q_1^2q_2^2(q_1^2 + q_2^2 - l^2)^2},$$
$$q_2' = \frac{Dp_2q_1^2q_2^2 + \dfrac{Dp_1}{2}\,q_1q_2(q_1^2 + q_2^2 - l^2)}{4q_1^4q_2^4 - q_1^2q_2^2(q_1^2 + q_2^2 - l^2)^2},$$

ou bien, en observant que $D = 4q_1^2q_2^2 - (q_1^2 + q_2^2 - l^2)^2$ est facteur commun aux deux termes, et divisant par $q_1^2q_2^2$:

$$q_1' = p_1 + \frac{p_2}{2q_1q_2}(q_1^2 + q_2^2 - l^2),$$
$$q_2' = p_2 + \frac{p_1}{2q_1q_2}(q_1^2 + q_2^2 - l^2).$$



Substituant ces valeurs dans T, nous aurons T en fonction de p_1, p_2, q_1, q_2 :

$$T = \frac{1}{2}\left[p_1^2 + p_2^2 + \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}(q_1^2 + q_2^2 - l^2)\right].$$

La fonction de force U ne renfermant pas explicitement le temps, l'équation de laquelle dépend la solution du problème est :

$$T - U = h,$$

en remplaçant dans T les quantités p_1, p_2, respectivement par $\frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}$. On obtient ainsi l'équation aux dérivées partielles :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial q_2}\right)^2 + \frac{\partial S}{\partial q_1}\frac{\partial S}{\partial q_2}\cdot\frac{q_1^2 + q_2^2 - l^2}{q_1 q_2} = 2\left(\frac{\mu_1}{q_1} + \frac{\mu_2}{q_2}\right) + 2h. \quad (A)$$

Remarque. — On peut obtenir cette équation de la manière suivante :

L'équation $T - U = h$ nous donne, en coordonnées rectangulaires :

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right] = \frac{\mu_1}{q_1} + \frac{\mu_2}{q_2} + h, \quad (B)$$

q_1, q_2 étant des fonctions de x et de y.

Transformons cette équation de manière à prendre q_1, q_2 pour variables indépendantes. Nous aurons :

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial x} = \frac{x}{q_1}\frac{\partial S}{\partial q_1} + \frac{x - a}{q_2}\frac{\partial S}{\partial q_2},$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial y} = \frac{y}{q_1}\frac{\partial S}{\partial q_1} + \frac{y - b}{q_2}\frac{\partial S}{\partial q_2},$$

et en substituant dans l'équation précédente (B), on trouve facilement l'équation (A).

Il s'agit maintenant de trouver une solution complète de l'équation (A), renfermant une constante arbitraire, outre la constante additive.

Or, on peut la mettre sous la forme suivante :

$$\left.\begin{array}{l} q_1 q_2 \left[\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial q_2}\right)^2\right] + \frac{\partial S}{\partial q_1}\frac{\partial S}{\partial q_2}(q_1^2 + q_2^2 - l^2) \\ = 2\mu_1 q_2 + 2\mu_2 q_1 + 2hq_1q_2\,; \end{array}\right\} \quad (C)$$

posons :

$$q_1 + q_2 = f, \quad q_1 - q_2 = g,$$

d'où :

$$q_1 = \frac{f+g}{2}, \quad q_2 = \frac{f-g}{2},$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_1} = \frac{\partial S}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial q_1} + \frac{\partial S}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial q_1} = \frac{\partial S}{\partial f} + \frac{\partial S}{\partial g},$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_2} = \frac{\partial S}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial q_2} + \frac{\partial S}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial q_2} = \frac{\partial S}{\partial f} - \frac{\partial S}{\partial g}.$$

L'équation (C) nous donne alors la suivante :

$$(f^2 - l^2)\left(\frac{\partial S}{\partial f}\right)^2 + (l^2 - g^2)\left(\frac{\partial S}{\partial g}\right)^2 = \mu_1 f + \mu_2 f + \frac{h}{2}f^2 - \mu_1 g + \mu_2 g - \frac{h}{2}g^2.$$

Pour trouver une solution de cette équation, nous poserons $S = F + G$, F et G étant deux fonctions respectivement de f et g, qui seront déterminées par les équations :

$$(f^2 - l^2)\,F'^2 = (\mu_1 + \mu_2)f + \frac{hf^2}{2} + \beta,$$

$$(l^2 - g^2)\,G'^2 = (\mu_2 - \mu_1)g - \frac{h}{2}g^2 - \beta,$$

et nous aurons :

$$S = \int \frac{\sqrt{(\mu_1 + \mu_2)f + \frac{hf^2}{2} + \beta}}{\sqrt{f^2 - l^2}}\,df + \int \frac{\sqrt{(\mu_2 - \mu_1)g - \frac{hg^2}{2} - \beta}}{\sqrt{l^2 - g^2}}\,dg + C.$$

Les intégrales du problème sont alors :

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = \gamma, \quad \frac{\partial S}{\partial h} = t - t_0,$$

et l'on voit que la solution dépend des fonctions elliptiques.

X.

Théorème de M. Darboux.

66. Le premier théorème de Jacobi (n° **41**) peut s'énoncer de la manière suivante :

Étant donnée l'équation :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t_1, q_1, \dots q_k, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots \frac{\partial V}{\partial q_k}\right) = 0, \qquad (1)$$

remplaçons dans la fonction H *les* $\frac{\partial V}{\partial q_i}$ *par* p_i, *et intégrons le système des* 2k *équations différentielles ordinaires :*

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \qquad (2)$$

L'intégration de ces équations (2) *nous donnera les variables* p_i, q_i *en fonction de* t *et des valeurs initiales* p_i^0, q_i^0 *des* p_i, q_i *pour* $t = t_0$.

Formons ensuite l'intégrale :

$$V = \int_{t_0}^{t} \varphi dt = \int_{t_0}^{t}\left(\sum p_i \frac{\partial q_i}{dt} - H\right) dt = \int_{t_0}^{t}\left(\sum p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H\right) dt.$$

Nous pourrons exprimer V *en fonction de* t *et des* 2k *quantités* q_i^0, p_i^0; *mais des* k *formules qui donnent* $q_1, q_2, \dots q_k$, *on peut tirer* $p_1^0, p_2^0, \dots p_k^0$, *en fonction de* $t, q_1, q_2, \dots q_k, q_1^0, \dots q_k^0$, *et par suite exprimer* V *en fonction des* 2k+1 *quantités :*

$$t, q_1, q_2, \dots q_k, q_1^0, \dots q_k^0.$$

La fonction V *ainsi obtenue sera une intégrale, contenant* k *constantes arbitraires* $q_1^0, q_2^0, \dots q_k^0$, *de l'équation aux dérivées partielles* (1), *et alors, les intégrales du système* (2) *pourront être mises sous la forme :*

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i. \quad \frac{\partial V}{\partial q_i^0} = -p_i^0.$$

La démonstration de Jacobi repose sur la considération suivante :

Supposons que l'on fasse varier infiniment peu les valeurs des constantes qui figurent dans les expressions des p_i et des q_i; la variation de V, considérée comme fonction de ces arbitraires, est donnée par la formule :

$$\delta V = \sum p_i \delta q_i - \sum p_i^0 \delta q_i^0.$$

Or, si l'on exprime V en fonction des q_i et q_i^0, on a aussi :

$$\delta V = \sum \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i + \sum \frac{\partial V}{\partial q_i^0} \delta q_i^0.$$

De ces deux formules on déduit la suivante :

$$\sum \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} - p_i\right) \delta q_i + \sum \left(\frac{\partial V}{\partial q_i^0} + p_i^0\right) \delta q_i^0 = 0,$$

de laquelle Jacobi conclut les équations :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial V}{\partial q_i^0} = -p_i^0.$$

Mais, comme l'a remarqué M. Mayer, cette conclusion n'est exacte que si les variations δq_i et δq_i^0 sont indépendantes les unes des autres, comme le sont les δq_i^0 et les δp_i^0. Cherchons donc quelle est la condition qui doit être vérifiée pour que cela ait lieu, c'est-à-dire pour que le théorème de Jacobi soit applicable.

On a :

$$q_i = f(t, q_i^0, p_i^0);$$

par suite, si les δq_i sont indépendants des δq_i^0, il vient :

$$\delta q_i = \frac{\partial q_i}{\partial p_1^0} \delta p_1^0 + \frac{\partial q_i}{\partial p_2^0} \delta p_2^0 + \cdots + \frac{\partial q_i}{\partial p_k^0} \delta p_k^0,$$

pour $i = 1, 2, \ldots k$.

Mais, les δp_i^0 sont indépendants les uns des autres, ce qui ne peut avoir lieu que si le déterminant des coefficients :

$$R = \sum \frac{\partial q_1}{\partial p_1^0} \frac{\partial q_2}{\partial p_2^0} \cdots \frac{\partial q_k}{\partial p_k^0},$$

est différent de zéro.

Mais, si R est différent de zéro, les q_i s'exprimeront en fonction des p_i^0 sans qu'il existe aucune équation de condition entre les q_i (n° **50**). Donc, si R est différent de zéro, il n'existe aucune équation de condition entre les q_i, et par conséquent les δq_i sont indépendants les uns des autres.

Donc, la condition pour que les δq_i soient indépendants les uns des autres et indépendants des δq_i^0, est que le déterminant R soit différent de zéro.

D'ailleurs, les p_i^0 peuvent être exprimés en fonction de t, des q_i et des q_i^0. Or, si l'on reprend les équations (2), les $2k$ constantes arbitraires des intégrales de ces équations pourront être exprimées en fonction des q_i^0 et des p_i^0; mais, les p_i^0 étant exprimés en fonction de t, q_i et q_i^0, il en résulte que les $2k$ constantes d'intégration peuvent être exprimées en fonction de t, q_i et q_i^0.

C'est ce qui arrivera lorsque la fonction H est telle que le déterminant :

$$R' = \sum \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_1} \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial p_2} \cdots \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_k},$$

est différent de zéro. Car, en posant :

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} = f_1, \quad \frac{\partial H}{\partial p_2} = f_2, \ldots \frac{\partial H}{\partial p_k} = f_k,$$

on a :

$$R' = \sum \frac{\partial f_1}{\partial p_1} \frac{\partial f_2}{\partial p_2} \cdots \frac{\partial f_k}{\partial p_k}.$$

Or, si R' est différent de zéro, les f_i s'exprimeront en fonction des p_i, sans qu'il existe aucune relation entre les f_i : ces fonctions f_i sont donc indépendantes les unes des autres (n° **50**). Par conséquent, les équations :

$$q_1' = f_1, \quad q_2' = f_2, \ldots q_k' = f_k,$$

ou, ce qui est la même chose, les équations :

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots \frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k},$$

sont compatibles, et serviront à déterminer les p_i en fonction de $t, q_1, \dots q_k, q'_1, \dots q'_k$. On en déduira donc pour les p_i des expressions de la forme :

$$p_i = fonct.\,(t,\, q_1,\, \dots\, q_k,\, q'_1,\, \dots\, q'_k);$$

par conséquent, $\frac{dp_i}{dt}$ est une fonction du second ordre, et les équations canoniques (2) nous donneront k équations du second ordre entre $t, q_1, \dots q_k$.

Mais, ces k équations du second ordre nous donneront k intégrales renfermant $2k$ constantes arbitraires, c'est-à-dire des relations entre t, q_1, ... q_k et les $2k$ constantes arbitraires. On pourra donc, en faisant $t = t_0$ dans ces k intégrales, en déduire k relations entre les $2k$ constantes arbitraires et $q_1^0, \dots q_k^0$. Nous aurons ainsi $2k$ équations entre les $2k$ constantes, les q_i et les q_i^0, et, par suite, nous pourrons déterminer ces $2k$ constantes arbitraires en fonction de t, q_i, q_i^0. Donc, si R' est différent de zéro, on peut déterminer les $2k$ constantes d'intégration en fonction de t, q_i, q_i^0.

Au contraire, si $R' = 0$, les fonctions f_i ne sont pas indépendantes les unes des autres, c'est-à-dire qu'il existera entre les fonctions f_i une ou plusieurs relations indépendantes des p_i. On pourra donc éliminer un certain nombre des p_i entre les équations :

$$q'_1 = f_1, \quad q'_2 = f_2, \dots \quad q'_k = f_k,$$

et l'on obtiendra ainsi entre t, q_i, q'_i un certain nombre de relations sans constantes arbitraires. Il en résultera, par conséquent, que les expressions des q_i ne renfermeront plus $2k$ constantes arbitraires.

Ainsi donc, la condition pour que les q_i et les q_i^0 soient indépendants les uns des autres, et, par conséquent, les δq_i et les δq_i^0, est que le déterminant R' soit différent de zéro. Si $R' = 0$,

les q_i et les q_i^0 ne sont pas indépendants les uns des autres, et alors on ne peut plus écrire les $2k$ équations :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial V}{\partial q_i^0} = -p_i^0,$$

et, par conséquent, la méthode de Jacobi est en défaut.

M. Mayer a remplacé cette méthode par une autre qui ne présente pas les mêmes objections, et que nous exposerons plus loin.

67. Mais, M. Darboux (*) a montré qu'en faisant subir une modification à la méthode de Jacobi, on peut la rendre applicable dans tous les cas.

Supposons que l'on ait intégré les équations :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \tag{2}$$

c'est-à-dire que l'on ait trouvé $2k$ relations entre les quantités t, q_i, p_i, q_i^0 et p_i^0.

Supposons que n de ces relations puissent s'exprimer indépendamment des p_i, p_i^0, et soient :

$$\left.\begin{array}{l} F_1(t, q_1, \ldots q_k, q_1^0, \ldots q_k^0) = 0, \\ F_2(t, q_1, \ldots q_k, q_1^0, \ldots q_k^0) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_n(t, q_1, \ldots q_k, q_1^0, \ldots q_k^0) = 0, \end{array}\right\} \tag{3}$$

ces n équations.

On peut, de ces n équations, tirer les valeurs de n des quantités q_i^0, par exemple $q_1^0, \ldots q_n^0$, et l'on aura :

$$\left.\begin{array}{l} F_1 = f_1(t, q_1, \ldots q_k, q_{n+1}^0, \ldots q_k^0) - q_1^0 = 0, \\ F_2 = f_2(t, q_1, \ldots q_k, q_{n+1}^0, \ldots q_k^0) - q_2^0 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_n = f_n(t, q_1, \ldots q_k, q_{n+1}^0, \ldots q_k^0) - q_n^0 = 0. \end{array}\right\} \tag{4}$$

(*) *Comptes rendus*, 18 janvier 1875, p. 160.

Alors les $2k$ quantités q_i, q_i^0 ne peuvent plus être considérées comme indépendantes les unes des autres, n d'entre elles pouvant être exprimées en fonction des autres.

Considérons maintenant, comme dans la méthode de Jacobi, l'intégrale :

$$V = \int_{t_0}^{t} \left(\sum p_i q_i' - H\right) dt,$$

et exprimons la fonction V en fonction des q_i, q_i^0. Nous aurons, comme dans la méthode de Jacobi :

$$\delta V = \sum p_i \delta q_i - \sum p_i^0 \delta q_i^0,$$

et

$$\delta V = \sum \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i + \sum \frac{\partial V}{\partial q_i^0} \delta q_i^0,$$

d'où l'on tire, comme précédemment :

$$\sum \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} - p_i\right) \delta q_i + \sum \left(\frac{\partial V}{\partial q_i^0} + p_i^0\right) \delta q_i^0 = 0. \qquad (5)$$

Or, les δq_i et δq_i^0 n'étant pas indépendants, on ne peut pas égaler les coefficients à zéro. Mais on a, entre ces variations, les n relations :

$$\frac{\partial F_1}{\partial q_1} \delta q_1 + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial F_1}{\partial q_1^0} \delta q_1^0 + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial q_k^0} \delta q_k^0 = 0,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_1} \delta q_1 + \cdots + \frac{\partial F_2}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial F_2}{\partial q_1^0} \delta q_1^0 + \cdots + \frac{\partial F_2}{\partial q_k^0} \delta q_k^0 = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial F_n}{\partial q_1} \delta q_1 + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial F_n}{\partial q_1^0} \delta q_1^0 + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial q_k^0} \delta q_k^0 = 0;$$

par conséquent, en désignant par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ des multiplicateurs, et raisonnant comme d'ordinaire, il viendra :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} - p_i + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial q_i} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial F_n}{\partial q_i} = 0, \qquad (6)$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_i^0} + p_i^0 + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial q_i^0} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial F_n}{\partial q_i^0} = 0. \qquad (7)$$

Ces équations, au nombre de $2k$, jointes aux équations (4), permettront de déterminer les $2k+n$ quantités :

$$q_1^0, \dots q_n^0, p_1^0, \dots p_k^0, p_1, \dots p_k,$$

en fonction des $2k$ quantités :

$$q_1, \dots q_k, q_{n+1}^0, \dots q_k^0, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n.$$

Elles donneront donc les intégrales des équations (2).

Or, ces $2k$ quantités en fonction desquelles toutes les autres sont déterminées sont indépendantes les unes des autres; par conséquent, il ne peut exister aucune relation entre ces $2k$ quantités, et, par suite, *toute relation où elles entreront seules devra être identiquement satisfaite.*

Cela posé, suivons pas à pas la marche de Jacobi. Nous aurons :

$$\frac{dV}{dt} = p_1\frac{dq_1}{dt} + p_2\frac{dq_2}{dt} + \dots + p_k\frac{dq_k}{dt} - H;$$

or,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial q_k}\frac{dq_k}{dt}.$$

Par suite,

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial q_k}\frac{dq_k}{dt} = p_1\frac{dq_1}{dt} + \dots + p_k\frac{dq_k}{dt} - H.$$

Remplaçant les $\frac{\partial V}{\partial q_i}$ par leurs valeurs déduites de l'équation (6) :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i - \lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial q_i} - \dots - \lambda_n\frac{\partial F_n}{\partial q_i},$$

on a, en supprimant les termes semblables :

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t} &- \lambda_1\left(\frac{\partial F_1}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial q_k}\frac{dq_k}{dt}\right)\\ &- \lambda_2\left(\frac{\partial F_2}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial q_k}\frac{dq_k}{dt}\right)\\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\\ &- \lambda_n\left(\frac{\partial F_n}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial q_k}\frac{dq_k}{dt}\right) = -H,\end{aligned}$$

ou bien :

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \lambda_\alpha \left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial F_\alpha}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} \right) = - H(t, q_i, p_i).$$

Or, de l'équation :

$$F_\alpha(t, q_1, \ldots q_k, q_\alpha^0, q_{n+1}^0, \ldots q_k^0) = 0,$$

on tire :

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial F_\alpha}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial F_\alpha}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} = 0.$$

Par suite, le coefficient de λ_α est égal à $-\frac{\partial F_\alpha}{\partial t}$, et l'on a :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \lambda_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial t} + H(t, q_i, p_i) = 0.$$

Si maintenant nous remplaçons dans H, p_i par sa valeur (6) :

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial q_i} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial F_n}{\partial q_i},$$

il viendra :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial t} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial F_n}{\partial t}$$
$$+ H\left(t, q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial q_i} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial F_n}{\partial q_i}\right) = 0,$$

ou bien, si l'on observe que les dérivées de F_α qui entrent dans cette équation sont précisément les mêmes que celles de f_α :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{dt} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{dt} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial f_n}{\partial t} \\ + H\left(t, q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial q_i} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial f_n}{\partial q_i}\right) = 0. \end{array}\right\} \quad (8)$$

Actuellement, si l'on imagine qu'au moyen des équations (4) on ait éliminé de la fonction V les quantités $q_1^0, \ldots q_n^0$, l'équation (8) a lieu entre les $2k$ arbitraires

$$q_1, \ldots q_k, q_{n+1}^0, \ldots q_k^0, \lambda_1, \ldots \lambda_n.$$

Il en résulte, d'après ce que nous avons dit plus haut, que *cette équation* (8) *sera identiquement satisfaite.*

Or, si l'on considère $\lambda_1, \dots \lambda_n$ comme des constantes, l'équation (8) exprime que la fonction :

$$V + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n,$$

satisfait à l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t, q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i}\right) = 0;$$

elle sera, par conséquent, une intégrale de cette équation, et nous aurons le théorème suivant qui est dû à M. Darboux :

Théorème. — *Étant données les équations différentielles ordinaires :*

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

supposons qu'on les ait intégrées, et que des intégrales on puisse déduire n *relations distinctes, et* n *seulement, entre les variables* $q_1, q_2, \dots q_k$, *et leurs valeurs initiales. On mettra ces relations sous la forme :*

$$\begin{aligned}
F_1 &= f_1(t, q_1, q_2, \dots q_k, q_{n+1}^0, \dots q_k^0) - q_1^0 = 0,\\
F_2 &= f_2(t, q_1, q_2, \dots q_k, q_{n+1}^0, \dots q_k^0) - q_2^0 = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
F_n &= f_n(t, q_1, q_2, \dots q_k, q_{n+1}^0, \dots q_k^0) - q_n^0 = 0,
\end{aligned}$$

et l'on calculera l'intégrale :

$$V = \int_{t_0}^{t} \left(p_1 \frac{dq_1}{dt} + p_2 \frac{dq_2}{dt} + \cdots + p_k \frac{dq_k}{dt} - H\right) dt.$$

Cette intégrale pourra toujours s'exprimer en fonction des variables $q_1, q_2, \dots q_k, q_{n+1}^0, \dots q_k^0$. *Cette expression de* V *étant obtenue, les intégrales générales du système des équations différentielles pourront être mises sous la forme :*

$$\begin{aligned}
p_i - \frac{\partial V}{\partial q_i} &= \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial q_i} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial q_i} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial F_n}{\partial q_i},\\
p_i^0 + \frac{\partial V}{\partial q_i^0} &= -\lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial q_i^0} - \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial q_i^0} - \cdots - \lambda_n \frac{\partial F_n}{\partial q_i^0},
\end{aligned}$$

et, en outre, la fonction :

$$V + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n,$$

dans laquelle $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ *sont des constantes arbitraires, sera une intégrale de l'équation différentielle partielle :*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H + 0,$$

où l'on a remplacé dans H, p_i *par* $\frac{\partial V}{\partial q_i}$.

XI.

Théorème de M. Mayer.

68. Soit $H(t, q_1, \ldots q_k, p_1, \ldots p_k)$ une fonction donnée des $2k+1$ variables t, q_i, p_i, et soient données entre ces variables les $2k$ équations différentielles ordinaires :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{1}$$

Supposons que l'on ait intégré complètement ces $2k$ équations; on aura ainsi $2k$ intégrales renfermant $2k$ constantes arbitraires. Exprimons ces $2k$ constantes en fonction des valeurs initiales q_i^0, p_i^0, que prennent les variables q_i, p_i, pour la valeur choisie arbitrairement t_0 de t.

Nous aurons ainsi les équations :

$$q_i = \text{fonct.}\,(t, t_0, q_1^0, q_2^0, \ldots q_k^0, p_1^0, \ldots p_k^0),$$
$$p_i = \text{fonct.}\,(t, t_0, q_1^0, q_2^0, \ldots q_k^0, p_1^0, \ldots p_k^0).$$

Nous les représenterons par :

$$\left.\begin{array}{l} q_i = [q_i], \\ p_i = [p_i], \end{array}\right\} \tag{2}$$

où les $[q_i]$ et les $[p_i]$ sont des fonctions déterminées de t, t_0, q_i^0, p_i^0, telles que, pour $t = t_0$, elles se réduisent respectivement à q_i^0 et p_i^0.

Nous emploierons dorénavant les crochets pour indiquer les résultats que l'on obtient en remplaçant p_i, q_i par les valeurs (2).

Il est d'abord évident que le déterminant :

$$R = \sum \frac{\partial[q_1]}{\partial q_1^0} \frac{\partial[q_2]}{\partial q_2^0} \cdots \frac{\partial[q_k]}{\partial q_k^0},$$

qui, pour $t = t_0$, se réduit à l'unité, ne peut jamais être nul.

Il en résulte donc que les équations :

$$[q_i] = q_i, \tag{3}$$

sont compatibles, et, par suite, en les résolvant par rapport aux k quantités q_i^0, on en déduira les valeurs de ces k quantités.

Cela établi, posons :

$$V = \sum_{i=1}^{i=k} q_i^0 p_i^0 + \int_{t_0}^{t} \left\{ \sum_{i=1}^{i=k} p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H \right\} dt, \tag{4}$$

et calculons la fonction V en fonction de :

$$t,\ t_0,\ q_1^0, \ldots q_k^0,\ p_1^0, \ldots p_k^0,$$

ce qui se fera évidemment au moyen des équations (2).

Nous aurons donc, en vertu des notations adoptées :

$$V = \sum q_i^0 p_i^0 + \int_{t_0}^{t} \left\{ \sum [p_i] \left[\frac{\partial H}{\partial p_i}\right] - [H] \right\} dt. \tag{4'}$$

Désignons par c une quelconque des constantes q_i^0, p_i^0, et nous aurons, en différentiant par rapport à c :

$$\frac{\partial V}{\partial c} = \frac{\partial}{\partial c} \sum q_i^0 p_i^0 + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial c} \left\{ \sum [p_i] \left[\frac{\partial H}{\partial p_i}\right] - [H] \right\} dt.$$

Or, on a :

$$\frac{\partial}{\partial c}\left\{\sum [p_i] \left[\frac{\partial H}{\partial p_i}\right] - [H]\right\} = \sum \left\{ \frac{\partial [p_i]}{\partial c} \left[\frac{\partial H}{\partial p_i}\right] + [p_i] \frac{\partial}{\partial c} \left[\frac{\partial H}{\partial p_i}\right] \right\} - \frac{\partial}{\partial c}\ [H].$$

Mais [H] n'est autre que la fonction primitive H dans laquelle

on a remplacé les p_i, q_i, en fonction des p_i^0, q_i^0; nous aurons donc :

$$\frac{\partial}{\partial c}[\mathrm{H}] = \sum \left\{ \left[\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_i}\right] \frac{\partial [q_i]}{\partial c} + \left[\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}\right] \frac{\partial [p_i]}{\partial c} \right\} \ (^*);$$

par conséquent,

$$\frac{\partial}{\partial c}\left\{ \sum [p_i] \left[\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}\right] - [\mathrm{H}] \right\} = \sum \frac{\partial [p_i]}{\partial c} \left[\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}\right] + \sum [p_i] \frac{\partial}{\partial c} \left[\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}\right]$$
$$- \sum \left[\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_i}\right] \frac{\partial [q_i]}{\partial c} - \sum \left[\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}\right] \frac{\partial [p_i]}{\partial c}$$
$$= \sum \left\{ [p_i] \frac{\partial}{\partial c} \left[\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}\right] - \left[\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_i}\right] \frac{\partial [q_i]}{\partial c} \right\}.$$

D'autre part, en vertu des équations (1), on a :

$$\left[\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_i}\right] = - \frac{d[p_i]}{dt},$$
$$\frac{\partial}{\partial c}\left[\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}\right] = \frac{\partial}{\partial c} \frac{d[q_i]}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial [q_i]}{\partial c};$$

par suite,

$$\frac{\partial}{\partial c}\left\{ \sum [p_i] \left[\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}\right] - [\mathrm{H}] \right\} = \sum \left\{ [p_i] \frac{d}{dt} \frac{\partial [q_i]}{\partial c} + \frac{d[p_i]}{dt} \frac{\partial [q_i]}{\partial c} \right\}$$
$$= \frac{d}{dt} \sum [p_i] \frac{\partial [q_i]}{\partial c}.$$

En intégrant entre les limites t_0 et t, il vient, pour le second terme du second membre de $\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial c}$:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial c}\left\{ \sum [p_i] \left[\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}\right] - [\mathrm{H}] \right\} dt = \int_{t_0}^{t} d \sum [p_i] \frac{\partial [q_i]}{\partial c}$$
$$= \left\{ \sum [p_i] \frac{\partial [q_i]}{\partial c} \right\}_{t_0}^{t} = \sum \left\{ [p_i] \frac{\partial [q_i]}{\partial c} - p_i^0 \frac{\partial q_i^0}{\partial c} \right\},$$

(*) On doit, dans le second membre de cette formule, renfermer toutes les quantités entre crochets, puisque ce second membre doit comme [H] être exprimé en fonction des q_i^0, p_i^0.

en observant que, pour $t = t_0$, $[p_i]$ et $[q_i]$ se réduisent, par hypothèse, à p_i^0 et q_i^0.

On a donc enfin :

$$\frac{\partial V}{\partial c} = \frac{\partial}{\partial c} \sum q_i^0 p_i^0 + \sum \left\{ [p_i] \frac{\partial [q_i]}{\partial c} - p_i^0 \frac{\partial q_i^0}{\partial c} \right\}.$$

Or, si, dans cette dernière formule, on fait $c = q_r^0$, il vient :

$$\frac{\partial V}{\partial q_r^0} = p_r^0 + \sum [p_i] \frac{\partial [q_i]}{\partial q_r^0} - p_r^0,$$

ou bien :

$$\frac{\partial V}{\partial q_r^0} = \sum [p_i] \frac{\partial [q_i]}{\partial q_r^0}.$$

Si, dans la même formule, on fait $c = p_r^0$, on obtient :

$$\frac{\partial V}{\partial p_r^0} = q_r^0 + \sum [p_i] \frac{\partial [q_i]}{\partial p_r^0}.$$

D'autre part, si dans la fonction V, exprimée en fonction de t, t_0, q_1^0, ... q_k^0, p_1^0, ... p_k^0, on remplace les q_i^0 par leurs valeurs tirées des équations (3), elle devient une fonction de t, t_0, q_1, ... q_k, p_1^0, ... p_k^0, que nous pouvons représenter par (V). Il est d'ailleurs évident que la fonction (V) se réduit inversement à la fonction V primitive, si l'on remplace dans (V) les quantités q_1, ... q_k par leurs valeurs (3), c'est-à-dire par :

$$q_i = [q_i].$$

Par suite, on a, en appliquant le théorème des fonctions de fonctions :

$$\frac{\partial V}{\partial q_r^0} = \sum \left[\frac{\partial (V)}{\partial q_i} \right] \frac{\partial [q_i]}{\partial q_r^0} \text{ (*)},$$

$$\frac{\partial V}{\partial p_r^0} = \left[\frac{\partial (V)}{\partial p_r^0} \right] + \sum \left[\frac{\partial (V)}{\partial q_i} \right] \frac{\partial [q_i]}{\partial p_r^0}.$$

(*) Les crochets des seconds membres indiquent que ces seconds membres doivent être exprimés comme les seconds membres des valeurs trouvées plus haut pour $\frac{\partial V}{\partial q_r^0}$, $\frac{\partial V}{\partial p_r^0}$, en fonction des p_i^0, q_i^0.

En comparant ces valeurs de $\frac{\partial V}{\partial q_r^0}$, $\frac{\partial V}{\partial p_r^0}$ avec les valeurs trouvées plus haut, on en conclut que l'on doit avoir identiquement :

$$\sum \left[\frac{\partial(V)}{\partial q_i} - p_i\right] \frac{\partial[q_i]}{\partial q_r^0} = 0, \tag{5}$$

$$\sum \left[\frac{\partial(V)}{\partial q_i} - p_i\right] \frac{\partial[q_i]}{\partial p_r^0} + \left[\frac{\partial(V)}{\partial p_r^0}\right] - q_r^0 = 0, \tag{6}$$

pour $r = 1, 2, \ldots k$.

Les équations (5), au nombre de k, sont linéaires et homogènes par rapport aux k quantités :

$$\left[\frac{\partial(V)}{\partial q_i} - p_i\right];$$

or, le déterminant des coefficients de ces équations est différent de zéro, d'après ce que nous avons vu précédemment; par conséquent, le système des équations (5) ne peut exister que si l'on a séparément :

$$\left[\frac{\partial(V)}{\partial q_i} - p_i\right] = 0, \tag{7}$$

pour $i = 1, 2, \ldots k$.

Le système des équations (6) nous donne alors :

$$\left[\frac{\partial(V)}{\partial p_r^0}\right] - q_r^0 = 0, \tag{8}$$

pour $r = 1, 2, \ldots k$.

Il résulte de là que les solutions complètes :

$$\left.\begin{array}{l} q_i = [q_i], \\ p_i = [p_i], \end{array}\right\} \tag{2}$$

des équations (1) doivent satisfaire identiquement aux $2k$ équations :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial(V)}{\partial q_i} = p_i, \\ \frac{\partial(V)}{\partial p_i^0} = q_i^0. \end{array}\right\} \tag{9}$$

En effet, les expressions (7) et (8) doivent être des identités, c'est-à-dire que, par la substitution dans les équations (9) des solutions complètes (2), ces équations (9) doivent devenir les identités (7) et (8).

Les équations (9) ne sont pas elles-mêmes des identités : en effet, puisque (V) est une fonction de t, t_0, q_1, ... q_k, p_1^0, ... p_k^0, il en résulte que les premiers membres des équations (9) ne renferment ni les p_i, ni les q_i^0, et comme les seconds membres ne renferment que les p_i et les q_i^0, il s'ensuit que les équations (9) ne sont pas des identités; elles ne le deviennent que par la substitution des p_i et des q_i tirées des équations (2).

Ces équations (9) sont donc équivalentes aux équations (2), et, par conséquent, ce sont des intégrales des équations (1). D'ailleurs, le nombre de ces équations est $2k$, et elles renferment $2k$ constantes arbitraires q_1^0, ... q_k^0, p_1^0, ... p_k^0; enfin, aucune de ces équations (9) ne peut être une conséquence des autres; car, dans chacune d'elles, il entre une quantité p_i ou q_i^0 qui ne se trouve pas dans les autres.

Il s'ensuit donc que les équations (9) forment un système d'intégrales complètes des équations (1).

Cherchons maintenant l'équation différentielle partielle à laquelle satisfait la fonction (V).

A cet effet, de même que tantôt nous avons trouvé $\frac{\partial V}{\partial q_r^0}$ et $\frac{\partial V}{\partial p_r^0}$ de deux manières différentes, nous allons former $\frac{dV}{dt}$ de deux manières différentes.

De l'équation (4') on tire :

$$\frac{dV}{dt} = \left[\sum p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H\right];$$

d'autre part, si l'on substitue dans (V) à la place de q_1, ... q_k, leurs valeurs (3), cette fonction devient V. Par conséquent, nous aurons, en vertu du théorème des fonctions de fonctions :

$$\frac{dV}{dt} = \left[\frac{\partial(V)}{\partial t}\right] + \sum \left[\frac{\partial(V)}{\partial q_i}\right] \frac{d[q_i]}{dt},$$

ou bien, à cause de la première équation (9) et de la première équation (1) :

$$\frac{dV}{dt} = \left[\frac{\partial(V)}{\partial t} + \sum p_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\right].$$

En comparant les deux valeurs de $\frac{dV}{dt}$, on obtient l'identité :

$$\left[\frac{\partial(V)}{\partial t} + H\right] = 0, \qquad (10)$$

c'est-à-dire que, par la substitution dans l'équation :

$$\frac{\partial(V)}{\partial t} + H = 0, \qquad (11)$$

des solutions complètes :

$$\left.\begin{array}{l} q_i = [q_i], \\ p_i = [p_i], \end{array}\right\} \qquad (2)$$

cette équation (11) doit devenir l'identité (10).

On conclut de là que les solutions complètes (2) des équations (1) doivent satisfaire identiquement à l'équation (11). Or, les solutions complètes (2) des équations (1) sont équivalentes aux équations (9).

Donc, si (V) est connue, les équations (9) satisferont à l'équation :

$$\frac{\partial(V)}{\partial t} + H = 0 \qquad (11)$$

Il s'ensuit que, si, dans cette dernière équation, on remplace les p_i par $\frac{\partial(V)}{\partial q_i}$, en vertu de la première des équations (9), on aura l'équation différentielle partielle suivante :

$$\frac{\partial(V)}{\partial t} + H\left(t, q_1, \dots q_k, \frac{\partial(V)}{\partial q_1}, \dots \frac{\partial(V)}{\partial q_k}\right) = 0, \qquad (12)$$

à laquelle doit satisfaire la fonction (V).

Or, si, à cette fonction (V) qui satisfait à (12), on ajoute une constante additive, on aura une solution complète de cette

équation (12). En effet, cette solution renferme k constantes arbitraires $p_1^0, \dots p_k^0$, et ces constantes ne peuvent pas être éliminées entre les quotients différentiels partiels $\frac{\partial (V)}{\partial q_1}, \dots \frac{\partial (V)}{\partial q_k}$, car alors une des k premières équations (9) serait une conséquence des autres, ce qui est impossible. Nous aurons donc le théorème suivant qui est dû à M. Mayer (*) :

Théorème. — *Étant donnée l'équation différentielle partielle :*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t, q_1, \dots q_k, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots \frac{\partial V}{\partial q_k}\right) = 0, \tag{A}$$

on remplace dans la fonction H, *les* $\frac{\partial V}{\partial q_i}$ *par* p_i, *et l'on forme les* 2k *équations différentielles ordinaires :*

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{B}$$

On intègre ce système, et l'on exprime les 2k *constantes d'intégration en fonction des valeurs initiales* p_i^0, q_i^0 *des* p_i, q_i *pour* $t = t_0$. *On substitue ces solutions dans l'expression :*

$$\sum p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H,$$

et l'on détermine l'intégrale :

$$V = \sum q_i^0 p_i^0 + \int_{t_0}^{t} \left\{ \sum p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H \right\} dt,$$

en fonction de t, t_0, q_i^0, p_i^0.

Cela posé, si de la fonction V *on élimine les* q_i^0 *au moyen des valeurs des* q_i *tirées des intégrales des équations* (B), *la fonction résultante* (V) *sera une fonction de* $t, q_1, \dots q_k, p_1^0, \dots p_k^0$.

La fonction :

$$V = (V) + const.,$$

(*) *Mathematische Annalen*, t. III.

sera une solution complète de l'équation différentielle partielle (A), *et les* $2k$ *équations :*

$$\frac{\partial(V)}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial(V)}{\partial p_i^0} = q_i^0,$$

seront les intégrales complètes du système (B) (*).

XII.

Théorème de M. Liouville.

69. Nous allons d'abord démontrer un théorème de M. Donkin (**) dont on fait un fréquent usage dans les théories de l'intégration des équations canoniques, et de l'intégration des équations différentielles partielles du premier ordre.

Ce théorème exige l'emploi de notations nouvelles introduites par Poisson, et par M. Donkin, et que nous devons faire connaître.

Si l'on suppose que α et β sont des fonctions des quantités $p_1, p_2, \ldots p_n, q_1, q_2, \ldots q_n$, on doit à Poisson la notation suivante (***) :

$$(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial q_i} \frac{\partial \beta}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha}{\partial p_i} \frac{\partial \beta}{\partial q_i} \right).$$

M. Donkin (IV), de son côté, a introduit une notation symbolique pour représenter la quantité entre parenthèses.

Il pose :

$$\frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(q_i, p_i)} = \frac{\partial \alpha}{\partial q_i} \frac{\partial \beta}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha}{\partial p_i} \frac{\partial \beta}{\partial q_i},$$

(*) On peut encore consulter sur cette question une Note de M. Bertrand, insérée dans les *Comptes rendus* du 20 mars 1876, p. 641.

(**) *Philosophical Transactions*, 1854, p. 83.

(***) *Mémoire sur la variation des constantes arbitraires* (JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, 15e Cahier, p. 281).

(IV) *Philosophical Transactions*, 1854, p. 72.

et l'on a ainsi :

$$(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(q_i, p_i)}.$$

70. Cela posé, supposons que l'on ait n équations :

$$a_1 = \varphi_1(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_i = \varphi_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

dans lesquelles $a_1, a_2, \ldots a_n$ sont des constantes arbitraires, les fonctions des seconds membres pouvant renfermer des quantités quelconques autres que les a_i.

Ces équations pourront servir à déterminer $p_1, p_2, \ldots p_n$, en fonction de $q_1, q_2, \ldots q_n$, et des constantes, et nous nous proposons de démontrer que la *condition d'intégrabilité de l'expression :*

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_k} = \frac{\partial p_k}{\partial q_i},$$

n'est autre que :

$$(a_i, a_k) = 0, \qquad \text{ou} \qquad (\varphi_i, \varphi_k) = 0.$$

En effet, si dans l'expression :

$$a_\mu = \varphi_\mu(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

on remplace $p_1, p_2, \ldots p_n$ par leurs valeurs en fonction de $q_1, q_2, \ldots q_n, a_1, a_2, \ldots a_n$, on aura une identité; par suite, en différentiant par rapport à q_i, il vient :

$$\frac{\partial a_\mu}{\partial q_i} + \frac{\partial a_\mu}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial a_\mu}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial q_i} = 0;$$

de même,

$$\frac{\partial a_\nu}{\partial q_i} + \frac{\partial a_\nu}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial a_\nu}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial q_i} = 0.$$

Multipliant la première par $\frac{\partial a_\nu}{\partial p_i}$, la seconde par $\frac{\partial a_\mu}{\partial p_i}$, et retranchant, on trouve :

$$\frac{\partial a_\mu}{\partial q_i}\frac{\partial a_\nu}{\partial p_i}-\frac{\partial a_\mu}{\partial p_i}\frac{\partial a_\nu}{\partial q_i}=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\left(\frac{\partial a_\mu}{\partial p_i}\frac{\partial a_\nu}{\partial p_k}-\frac{\partial a_\mu}{\partial p_k}\frac{\partial a_\nu}{\partial p_i}\right),$$

ou bien, d'après la notation de M. Donkin,

$$\frac{\partial(a_\mu,\ a_\nu)}{\partial(q_i,\ p_i)}=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\frac{\partial(a_\mu,\ a_\nu)}{\partial(p_i,\ p_k)}.$$

Faisons la somme des expressions analogues que l'on obtiendrait en donnant à i les valeurs 1, 2, ... n; le coefficient de $\frac{\partial p_i}{\partial q_k}$ étant le même que celui de $\frac{\partial p_k}{\partial q_i}$, pris en signe contraire, nous aurons :

$$(a_\mu,\ a_\nu)=\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}-\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right)\frac{\partial(a_\mu,\ a_\nu)}{\partial(p_i,\ p_k)}. \tag{1}$$

De cette formule on conclut déjà que la *condition nécessaire* pour avoir :

$$\frac{\partial p_k}{\partial q_i}=\frac{\partial p_i}{\partial q_k},$$

pour toutes les valeurs de i et k égales à 1, 2, ... n, c'est que les $\frac{n(n-1)}{2}$ équations :

$$(a_\mu,\ a_\nu)=0,$$

soient vérifiées pour les mêmes valeurs de μ et ν.

Pour démontrer que *cette condition est suffisante,* multiplions les deux membres de l'équation (1) par $\frac{\partial(p_r,\ p_s)}{\partial(a_\mu,\ a_\nu)}$, et faisons la somme pour toutes les valeurs de μ et ν égales à 1, 2, ... n. Il viendra :

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{\mu=1}^{\mu=n}\sum_{\nu=1}^{\nu=n}(a_\mu,\ a_\nu)\frac{\partial(p_r,\ p_s)}{\partial(a_\mu,\ a_\nu)}\\+&\sum_{\mu=1}^{\mu=n}\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\frac{\partial(p_r,\ p_s)}{\partial(a_\mu,\ a_\nu)}\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}-\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right)\frac{\partial(a_\mu,\ a_\nu)}{\partial(p_i,\ p_k)}=0.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Le coefficient de $\frac{\partial p_i}{\partial q_k}-\frac{\partial p_k}{\partial q_i}$ est évidemment :

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n}\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\left(\frac{\partial p_r}{\partial a_\mu}\frac{\partial p_s}{\partial a_\nu}-\frac{\partial p_s}{\partial a_\mu}\frac{\partial p_r}{\partial a_\nu}\right)\left(\frac{\partial a_\mu}{\partial p_i}\frac{\partial a_\nu}{\partial p_k}-\frac{\partial a_\mu}{\partial p_k}\frac{\partial a_\nu}{\partial p_i}\right). \tag{3}$$

Il est facile de simplifier ce coefficient. En effet, puisque p_r et p_s sont des fonctions de $a_1, a_2, \ldots a_n$, on a :

$$\frac{\partial p_r}{\partial p_i} = \frac{\partial p_r}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_i} + \frac{\partial p_r}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial p_i} + \cdots + \frac{\partial p_r}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial p_i},$$

$$\frac{\partial p_r}{\partial p_k} = \frac{\partial p_r}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_k} + \frac{\partial p_r}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial p_k} + \cdots + \frac{\partial p_r}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial p_k},$$

$$\frac{\partial p_s}{\partial p_i} = \frac{\partial p_s}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_i} + \frac{\partial p_s}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial p_i} + \cdots + \frac{\partial p_s}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial p_i},$$

$$\frac{\partial p_s}{\partial p_k} = \frac{\partial p_s}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_k} + \frac{\partial p_s}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial p_k} + \cdots + \frac{\partial p_s}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial p_k}.$$

La somme double (3) est une somme de produits de deux déterminants. En appliquant les règles de la multiplication et de l'addition des déterminants, on trouve que cette somme double se réduit au déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial p_r}{\partial p_i} & \frac{\partial p_r}{\partial p_k} \\ \frac{\partial p_s}{\partial p_i} & \frac{\partial p_s}{\partial p_k} \end{vmatrix} = \frac{\partial p_r}{\partial p_i}\frac{\partial p_s}{\partial p_k} - \frac{\partial p_r}{\partial p_k}\frac{\partial p_s}{\partial p_i} = \frac{\partial(p_r, p_s)}{\partial(p_i, p_k)}.$$

L'équation (2) se réduit donc à la suivante :

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n}\sum_{\nu=1}^{\nu=n}(a_\mu, a_\nu)\frac{\partial(p_r, p_s)}{\partial(a_\mu, a_\nu)} + \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k} - \frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right)\frac{\partial(p_r, p_s)}{\partial(p_i, p_k)} = 0.$$

Mais, on voit facilement que, si l'on développe le second terme, il n'y a que le coefficient de $\frac{\partial p_r}{\partial q_s} - \frac{\partial p_s}{\partial q_r}$ qui ne soit pas nul, et il se réduit à l'unité. En effet, le coefficient de $\frac{\partial p_r}{\partial q_s} - \frac{\partial p_s}{\partial q_r}$ s'obtient en faisant $i = r$, $k = s$, ce qui nous donne pour ce coefficient :

$$\frac{\partial(p_r, p_s)}{\partial(p_r, p_s)} = \frac{\partial p_r}{\partial p_r}\frac{\partial p_s}{\partial p_s} - \frac{\partial p_r}{\partial p_s}\frac{\partial p_s}{\partial p_r} = 1,$$

puisque :

$$\frac{\partial p_r}{\partial p_r} = 1, \quad \frac{\partial p_s}{\partial p_s} = 1, \quad \frac{\partial p_r}{\partial p_s} = 0, \quad \frac{\partial p_s}{\partial p_r} = 0.$$

Il est évident que si i et k sont différents de r et s, par exemple $i = r'$, $k = s'$, le coefficient de :

$$\frac{\partial p_{r'}}{\partial q_{s'}} - \frac{\partial p_{s'}}{\partial q_{r'}},$$

sera nul.

Nous aurons donc :

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} (a_\mu, a_\nu) \frac{\partial(p_r, p_s)}{\partial(a_\mu, a_\nu)} + \left(\frac{\partial p_r}{\partial q_s} - \frac{\partial p_s}{\partial q_r}\right) = 0,$$

ou bien, en remplaçant les lettres r et s par i et k :

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} (a_\mu, a_\nu) \frac{\partial(p_i, p_k)}{\partial(a_\mu, a_\nu)} + \frac{\partial p_i}{\partial q_k} - \frac{\partial p_k}{\partial q_i} = 0.$$

Il résulte de cette dernière formule que si l'on a :

$$(a_\mu, a_\nu) = 0,$$

pour toutes les valeurs de μ et ν égales à $1, 2, \ldots n$, on aura :

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_k} = \frac{\partial p_k}{\partial q_i},$$

pour toutes les valeurs de i et k égales à $1, 2, \ldots n$.

71. On en conclut le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si les* $\frac{n(n-1)}{2}$ *équations* :

$$(a_\mu, a_\nu) = 0,$$

sont vérifiées identiquement, les valeurs de $p_1, p_2, \ldots p_n$, *en fonction de* $q_1, q_2, \ldots q_n$, *déduites des* n *équations :*

$$\varphi_1 = a_1, \varphi_2 = a_2, \ldots \varphi_n = a_n,$$

satisfont à la condition :

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_k} = \frac{\partial p_k}{\partial q_i},$$

en d'autres termes, ce sont les quotients différentiels d'une fonction de $q_1, q_2, \dots q_n$, *et l'expression :*

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n,$$

est une différentielle exacte.

72. Ce théorème étant démontré, revenons au problème de l'intégration des équations canoniques :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

H étant une fonction de $q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n$, ne renfermant pas explicitement t.

Nous avons vu (n° **17**) que l'*intégrale des forces vives :*

$$H = h,$$

est une intégrale de ces équations.

73. Ceci rappelé, démontrons le théorème suivant :

Théorème de M. Liouville. — *Si, par un moyen quelconque, on parvient à trouver* $n - 1$ *autres intégrales des équations* (4), *savoir :*

$$\varphi_1 = a_1, \ \varphi_2 = a_2, \ \dots \ \varphi_{n-1} = a_{n-1},$$

et si les premiers membres de ces équations sont des fonctions de $q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n$, *ne contenant pas explicitement le temps, et satisfaisant à la condition :*

$$(\varphi_i, \varphi_k) = 0,$$

pour toutes les valeurs de i *et* k *égales à* $1, 2, \dots n$, *le problème sera résolu.*

Il suffira de résoudre les n *équations :*

$$H = h, \ \varphi_1 = a_1, \ \varphi_2 = a_2, \ \dots \ \varphi_{n-1} = a_{n-1}, \qquad (5)$$

par rapport à $p_1, p_2, \dots p_n$, *et de substituer ces valeurs dans l'expression :*

$$dV' = p_1dq_1 + p_2dq_2 + \cdots + p_ndq_n - (H)dt, \qquad (6)$$

laquelle est alors une différentielle exacte. On intégrera cette expression, et l'on obtiendra les n *autres intégrales du problème en égalant à des constantes les dérivées de la fonction* V', *prises par rapport aux* n *premières constantes.*

Il est d'abord facile de voir que l'expression :

$$p_1dq_1 + p_2dq_2 + \cdots + p_ndq_n - (H)dt,$$

est une différentielle exacte, lorsque l'on substitue à $p_1, p_2, \dots p_n$, leurs valeurs tirées des équations (2); en d'autres termes, que les conditions :

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_k} = \frac{\partial p_k}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{\partial (H)}{\partial q_i},$$

sont vérifiées, (H) désignant le résultat de la substitution de $p_1, p_2, \dots p_n$ dans H.

Nous avons vu (n° 71) que la condition :

$$(\varphi_i, \varphi_k) = 0,$$

équivaut à la condition d'intégrabilité :

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_k} = \frac{\partial p_k}{\partial q_i}.$$

Il nous reste donc à démontrer que l'on a aussi :

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{\partial (H)}{\partial q_i}.$$

Or, les quantités $p_1, p_2, \dots p_n$ ayant été déterminées en fonction de $q_1, q_2, \dots q_n$ et des constantes, au moyen des équations (5), le premier membre de l'équation $H = h$, qui est l'une de ces équations (5), devient, par la substitution de ces valeurs, iden-

tiquement égal à la constante h; par conséquent, on a identiquement :

$$(\mathrm{H}) = h,$$

et, par suite,

$$\frac{\partial(\mathrm{H})}{\partial q_i} = 0.$$

D'autre part, p_i ne renfermant pas explicitement le temps, on a identiquement :

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = 0,$$

et la seconde condition d'intégrabilité :

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{\partial(\mathrm{H})}{\partial q_i},$$

est satisfaite.

En intégrant l'expression (6), on a :

$$\mathrm{V}' = \mathrm{V} - ht, \tag{7}$$

V désignant l'intégrale de l'expression :

$$p_1dq_1 + p_2dq_2 + \cdots + p_ndq_n.$$

Cela posé, les n autres intégrales du problème sont données par les équations :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial a_1} &= \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a_1} = \alpha_1, \\ \frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial a_2} &= \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a_2} = \alpha_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial a_{n-1}} &= \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial a_{n-1}} = \alpha_{n-1}, \\ \frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial h} &= \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial h} - t = \alpha_n, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ étant des constantes arbitraires.

Il suffit pour s'en assurer de démontrer que les dérivées totales par rapport à t de ces équations se réduisent identiquement à zéro en vertu des équations (4).

Or, en désignant par i un quelconque des nombres $1, 2, \ldots n-1$, nous aurons :

$$\frac{d.\frac{\partial V}{\partial a_i}}{dt} = \frac{\partial\frac{\partial V}{\partial a_i}}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial\frac{\partial V}{\partial a_i}}{\partial q_n}\frac{dq_n}{dt}$$

$$= \frac{\partial\frac{\partial V}{\partial q_1}}{\partial a_i}\frac{dq_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial\frac{\partial V}{\partial q_n}}{\partial a_i}\frac{dq_n}{dt}$$

$$= \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial a_i} + \cdots + \frac{\partial H}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial a_i} = \frac{\partial(H)}{\partial a_i}.$$

Mais, comme (H) est identiquement égal à h, il en résulte que l'on a :

$$\frac{d.\frac{\partial V}{\partial a_i}}{dt} = 0.$$

Si maintenant nous prenons la dérivée totale par rapport à t de la dernière des équations (8) :

$$\frac{\partial V'}{\partial h} = \frac{\partial V}{\partial h} - t = \alpha_n,$$

nous verrons que cette dérivée est aussi identiquement nulle, en vertu des équations (4). En effet, on a :

$$\frac{d.\frac{\partial V'}{\partial h}}{dt} = \frac{d\left[\frac{\partial V}{\partial h} - t\right]}{dt} = -1 + \frac{\partial\frac{\partial V}{\partial h}}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial\frac{\partial V}{\partial h}}{\partial q_n}\frac{dq_n}{dt}$$

$$= -1 + \frac{\partial\frac{\partial V}{\partial q_1}}{\partial h}\frac{dq_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial\frac{\partial V}{\partial q_n}}{\partial h}\frac{dq_n}{dt}$$

$$= -1 + \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial h} + \cdots + \frac{\partial H}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial h}$$

$$= -1 + \frac{\partial(H)}{\partial h} = 0.$$

La seconde partie du théorème est donc démontrée.

74. *Remarque I.* — Il n'est même pas nécessaire de déterminer la fonction V, donnée par l'équation :

$$V = \int (p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n). \qquad (9)$$

En effet, si l'on prend la dérivée par rapport à a_μ de l'équation :

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_k} = \frac{\partial p_k}{\partial q_i},$$

il vient :

$$\frac{\partial \frac{\partial p_i}{\partial q_k}}{\partial a_\mu} = \frac{\partial \frac{\partial p_k}{\partial q_i}}{\partial a_\mu},$$

ou bien :

$$\frac{\partial \frac{\partial p_i}{\partial a_\mu}}{\partial q_k} = \frac{\partial \frac{\partial p_k}{\partial a_\mu}}{\partial q_i}. \qquad (10)$$

Par suite, on pourra remplacer les n équations (8) par les suivantes dont les premiers membres sont, en vertu de (10), des différentielles exactes :

$$\int \left(\frac{\partial p_1}{\partial a_1} dq_1 + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial a_1} dq_n\right) = \alpha_1,$$

$$\int \left(\frac{\partial p_1}{\partial a_2} dq_1 + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial a_2} dq_n\right) = \alpha_2,$$

. . . .

$$\int \left(\frac{\partial p_1}{\partial a_{n-1}} dq_1 + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial a_{n-1}} dq_n\right) = \alpha_{n-1},$$

$$\int \left(\frac{\partial p_1}{\partial h} dq_1 + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial h} dq_n\right) = \alpha_n + t.$$

75. *Remarque II.* — Il est facile d'obtenir l'équation aux dérivées partielles à laquelle doit satisfaire la fonction V', définie par l'équation :

$$dV' = p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n - H dt,$$

ou la fonction V définie par l'équation :

$$dV = p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n.$$

En effet, les valeurs de $p_1, p_2, \dots p_n$, déduites des équations (5), sont celles qui vérifient identiquement les équations :

$$\frac{\partial V'}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial V'}{\partial q_2} = p_2, \dots \frac{\partial V'}{\partial q_n} = p_n, \quad \frac{\partial V'}{\partial t} = -H;$$

par conséquent, la fonction V′ doit réduire à une identité l'équation aux dérivées partielles du premier ordre :

$$\frac{\partial V'}{\partial t} + H\left(q_1, q_2, \dots q_n, \frac{\partial V'}{\partial q_1}, \frac{\partial V'}{\partial q_2}, \dots \frac{\partial V'}{\partial q_n}\right) = 0;$$

ou bien, la fonction V doit vérifier l'équation aux dérivées partielles du premier ordre :

$$H\left(q_1, q_2, \dots q_n, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \dots \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) = h.$$

76. *Application.* — Comme application du théorème de M. Liouville, reprenons le problème du *mouvement d'un point matériel attiré vers un centre fixe en raison inverse du carré de la distance.*

Les équations du mouvement sont :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r^3},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{r^3}.$$

L'intégrale des forces vives est :

$$H = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - \frac{\mu}{r} = h.$$

On a donc :

$$\frac{\partial H}{\partial x'} = x', \quad \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\mu x}{r^3},$$

$$\frac{\partial H}{\partial y'} = y', \quad \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\mu y}{r^3}.$$

Par suite, les équations du mouvement peuvent être mises sous la forme canonique :

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial x'},\quad \frac{dx'}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x},$$
$$\frac{dy}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y'},\quad \frac{dy'}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial y}.$$

Ces équations renferment quatre fonctions inconnues x, y, x', y' de la variable t. Nous devons donc chercher, outre l'intégrale des forces vives, une autre intégrale ne renfermant pas explicitement le temps.

Or, cette intégrale est fournie par le principe des aires, qui nous donne l'équation :

$$\varphi = xy' - yx' = \alpha.$$

On vérifie facilement que la condition :

$$(\mathrm{H}, \varphi) = 0$$

est satisfaite; en effet, on a :

$$(\mathrm{H}, \varphi) = \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x'} - \frac{\partial H}{\partial x'}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y'} - \frac{\partial H}{\partial y'}\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$
$$= -\frac{\mu x}{r^3}\cdot y - x'y' + \frac{\mu y}{r^3}\cdot x + y'x' = 0.$$

De ces deux intégrales H et φ, nous pouvons tirer les valeurs de x' et y' qui rendent l'expression $x'dx + y'dy$ une différentielle exacte. Nous aurons :

$$x' = \frac{-\alpha y \pm x\sqrt{2\left(h+\frac{\mu}{r}\right)r^2 - \alpha^2}}{r^2},$$

$$y' = \frac{\alpha x \pm y\sqrt{2\left(h+\frac{\mu}{r}\right)r^2 - \alpha^2}}{r^2};$$

par suite, on a :

$$dV = \alpha \cdot \frac{xdy - ydx}{r^2} \pm \frac{xdx + ydy}{r^2} \sqrt{2\left(h + \frac{\mu}{r}\right) r^2 - \alpha^2},$$

d'où, en intégrant,

$$V = \alpha \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} \pm \int \frac{dr}{r} \sqrt{2\left(h + \frac{\mu}{r}\right) r^2 - \alpha^2}.$$

Les deux autres intégrales du problème sont :

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} \mp \int \frac{\alpha dr}{r\sqrt{2\left(h + \frac{\mu}{r}\right) r^2 - \alpha^2}} = k,$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \pm \int \frac{rdr}{\sqrt{2\left(h + \frac{\mu}{r}\right) r^2 - \alpha^2}} = t + g,$$

k et g étant deux nouvelles constantes.

Ce sont les intégrales que nous avons trouvées précédemment (n° 62) : la première est l'équation de la trajectoire, la seconde donne la relation entre le rayon vecteur et le temps.

XIII.

Mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe.

77. Soient l'origine des coordonnées au point fixe, ξ, η, ζ trois axes fixes rectangulaires, x, y, z les axes principaux du corps pour le point fixe, A, B, C les moments d'inertie principaux, p, q, r les vitesses angulaires autour des axes principaux.

Soient φ l'angle que fait l'axe $O\xi$ avec l'intersection OA des plans xy et $\xi\eta$, ψ l'angle de cette intersection OA avec l'axe Ox, θ l'angle des deux plans (fig. 3).

Nous aurons pour la somme des forces vives :

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2.$$

Or, la vitesse angulaire de la rotation peut être considérée comme la résultante de trois rotations p, q, r autour des axes x, y, z, ou comme la résultante de trois rotations dont les vitesses angulaires sont :

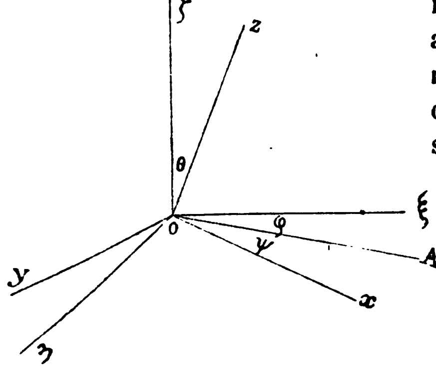


Fig. 3.

$\frac{d\theta}{dt}$ autour de OA,

$\frac{d\varphi}{dt}$ autour de Oζ,

$\frac{d\psi}{dt}$ autour de Oz,

et l'on a les formules suivantes :

$$\left.\begin{aligned} p &= \cos\psi.\theta' + \sin\psi\sin\theta.\varphi', \\ q &= -\sin\psi.\theta' + \cos\psi\sin\theta.\varphi', \\ r &= \psi' + \cos\theta.\varphi', \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

en posant :

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \psi' = \frac{d\psi}{dt}, \quad \theta' = \frac{d\theta}{dt}.$$

En remplaçant p, q, r par ces valeurs (1) dans l'expression de T, nous aurons T en fonction des variables φ, ψ, θ et de leurs dérivées φ', ψ', θ'.

Si nous posons maintenant d'après Poisson (*) (n° **10**) :

$$s = \frac{\partial T}{\partial \psi'}, \quad u = \frac{\partial T}{\partial \varphi'}, \quad v = \frac{\partial T}{\partial \theta'},$$

(*) *Mémoire sur la variation des constantes arbitraires* (Journal de l'École polytechnique, 15e Cahier).

nous aurons, puisque ψ' n'entre pas dans p et q :

$$s = \frac{\partial T}{\partial \psi'} = \frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \psi'} = Cr;$$

de même, φ' entrant dans p, q, r, il vient :

$$u = \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = \frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \varphi'} + \frac{\partial T}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \varphi'} + \frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \varphi'}$$
$$= Ap \sin\theta \sin\psi + Bq \sin\theta \cos\psi + Cr \cos\theta,$$

et, comme θ' n'entre pas dans r, on à :

$$v = \frac{\partial T}{\partial \theta'} = \frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \theta'} + \frac{\partial T}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \theta'} = Ap\cos\psi - Bq\sin\psi.$$

On a donc les équations :

$$Cr = s,$$
$$Ap\sin\psi + Bq\cos\psi = \frac{u - s\cos\theta}{\sin\theta},$$
$$Ap\cos\psi - Bq\sin\psi = v.$$

On en tire :

$$\left.\begin{aligned} Ap &= (u - s\cos\theta)\frac{\sin\psi}{\sin\theta} + v\cos\psi, \\ Bq &= (u - s\cos\theta)\frac{\cos\psi}{\sin\theta} - v\sin\psi, \\ Cr &= s. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Par suite,

$$\left.\begin{aligned} 2T = {} & \frac{1}{A}\left[(u - s\cos\theta)\frac{\sin\psi}{\sin\theta} + v\cos\psi\right]^2 \\ & + \frac{1}{B}\left[(u - s\cos\theta)\frac{\cos\psi}{\sin\theta} - v\sin\psi\right]^2 \\ & + \frac{1}{C}s^2. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Si nous remplaçons dans le second membre de cette équation s, u, v par $\frac{\partial V}{\partial \psi}$, $\frac{\partial V}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial V}{\partial \theta}$, et si nous désignons par U la fonction de force, et par h la constante des forces vives, le problème sera ramené à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre (n° 58) :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{A}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{\partial V}{\partial \psi}\cos\theta\right)\frac{\sin\psi}{\sin\theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta}\cos\psi\right]^2 \\ &+ \frac{1}{B}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{\partial V}{\partial \psi}\cos\theta\right)\frac{\cos\psi}{\sin\theta} - \frac{\partial V}{\partial \theta}\sin\psi\right]^2 \\ &+ \frac{1}{C}\left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)^2 = 2(U + h). \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Les équations différentielles du problème sont alors, en posant $H = T - U$:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial s}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial u}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v},$$

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \psi}, \quad \frac{du}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}.$$

78. La solution du problème se simplifie lorsque la fonction de force U est nulle, c'est-à-dire *lorsque le corps, soumis à une impulsion momentanée, est abondonné à lui-même.*

En effet, si l'on désigne (fig. 3) par a, b, c les cosinus des angles que l'axe des x fait avec les axes ξ, η, ζ, a', b', c' les cosinus relatifs à l'axe des y, et a'', b'', c'' les cosinus relatifs à l'axe des z, nous aurons, pour les équations de la conservation des aires :

$$\left.\begin{aligned} Ap.a + Bq.a' + Cr.a'' &= \alpha, \\ Ap.b + Bq.b' + Cr.b'' &= \beta, \\ Ap.c + Bq\ c' + Cr.c'' &= \gamma, \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Ap, Bq, Cr étant les sommes des moments des quantités de mouvement relatives aux axes principaux x, y, z, c'est-à-dire les aires décrites dans chacun des trois plans coordonnés Ox, y, z.

Or, les formules d'Euler nous donnent :

$$a = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta,$$

$$b = \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta,$$

$$c = \sin\psi\sin\theta,$$

$$a' = -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\theta,$$

$$b' = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta,$$

$$c' = \cos\psi\sin\theta,$$

$$a'' = \sin\varphi\sin\theta,$$

$$b'' = -\cos\varphi\sin\theta,$$

$$c'' = \cos\theta.$$

Les équations (5) prendront la forme suivante :

$$\left.\begin{aligned} v\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}(u\cos\theta - s) &= \alpha, \\ v\sin\varphi + \frac{\cos\varphi}{\sin\theta}(u\cos\theta - s) &= \beta, \\ u &= \gamma. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

En faisant la somme des carrés, et posant :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = k^2,$$

on a :

$$v^2 + u^2 + \frac{(u\cos\theta - s)^2}{\sin^2\theta} = k^2.$$

Cette équation, étant une combinaison des équations (6), peut remplacer l'une de ces équations : elle sera une des intégrales du problème. D'ailleurs, l'intégrale des forces vives $H = h$ est aussi une intégrale du problème.

Nous pourrons donc prendre pour intégrales du problème les trois équations :

$$\left.\begin{aligned}
&u=\gamma,\\
&v^2+u^2+\frac{(u\cos\theta-s)^2}{\sin^2\theta}=k^2,\\
&2h=\frac{1}{A}\left\{v\cos\psi+(u-s\cos\theta)\frac{\sin\psi}{\sin\theta}\right\}^2\\
&\quad+\frac{1}{B}\left\{-v\sin\psi+(u-s\cos\theta)\frac{\cos\psi}{\sin\theta}\right\}^2\\
&\quad+\frac{1}{C}s^2\ (^*).
\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

Il est facile de voir que ces trois intégrales satisfont aux conditions :

$$(\gamma, h)=0,\ (h, k)=0,\ (k, \gamma)=0.$$

Nous pourrons donc appliquer le théorème de M. Liouville (n° 73). Les équations (7) serviront à déterminer u, v, s en fonction de θ, φ, ψ ; nous pourrons alors déterminer la fonction V par une simple intégration, et nous aurons :

$$V=\int(sd\psi+ud\varphi+vd\theta).$$

(*) Il est d'ailleurs évident (n° 11) que l'équation :

$$u=const.,$$

est une intégrale du problème.

En effet, si l'on exprimait T en fonction de φ, ψ, θ, φ', ψ', θ', au moyen des formules (1), T ne renfermerait pas la variable φ, mais elle renfermerait sa dérivée φ'. D'ailleurs, la fonction de force U étant nulle, elle ne contient pas la variable φ. Par conséquent, l'équation :

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi'}=const.,$$

ou bien :

$$u=const.,$$

est une intégrale du problème.

Les trois autres intégrales du problème seront données par les équations :

$$\frac{\partial V}{\partial h} = t - t_0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \gamma} = \alpha_1,$$

$$\frac{\partial V}{\partial k} = \alpha_2,$$

t_0, α_1, α_2 étant des constantes arbitraires.

Nous aurons donc les trois intégrales :

$$\int\left(\frac{\partial s}{\partial h}\,d\psi + \frac{\partial u}{\partial h}\,d\varphi + \frac{\partial v}{\partial h}\,d\theta\right) = t - t_0,$$

$$\int\left(\frac{\partial s}{\partial \gamma}\,d\psi + \frac{\partial u}{\partial \gamma}\,d\varphi + \frac{\partial v}{\partial \gamma}\,d\theta\right) = \alpha_1,$$

$$\int\left(\frac{\partial s}{\partial k}\,d\psi + \frac{\partial u}{\partial k}\,d\varphi + \frac{\partial v}{\partial k}\,d\theta\right) = \alpha_2.$$

Les équations (7) ne peuvent, en général, être résolues par rapport à u, v, s. Car, l'élimination de s et de u conduit à une équation du quatrième degré en v.

Mais, si l'on suppose $B = A$, la difficulté disparaît, et les équations (7) nous donnent :

$$\left.\begin{aligned} u &= \gamma, \\ s^2 &= \frac{C}{C - A}(k^2 - 2Ah), \\ v &= \frac{1}{\sin\theta}(k^2 - u^2 - s^2 + 2us\cos\theta - k^2\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

79. La théorie précédente est applicable au mouvement de rotation de la terre autour de son centre de gravité. En effet, on sait qu'un corps solide libre dans l'espace tourne autour de son centre de gravité comme si ce point était fixe. Alors A, B, C seront les moments d'inertie principaux de la terre.

Soit OZ l'axe polaire dirigé vers le pôle nord, la rotation s'effectuant des x vers les y. Le plan $\xi\eta$ est l'écliptique fixe, l'axe des ξ l'origine des longitudes, θ l'obliquité, φ la longitude de l'équinoxe du printemps (point vernal), ψ l'ascension droite de l'axe des x.

Soient i l'inclinaison du *plan invariable* (plan du maximum

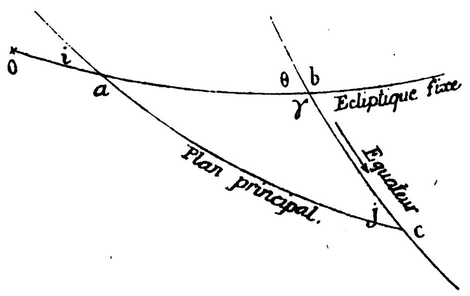


Fig. 4.

des aires) sur l'écliptique fixe, j l'inclinaison de l'équateur sur le plan invariable, que l'on appelle aussi *plan principal* (fig. 4).

Dans le cas de la terre, A ne diffère presque pas de B, θ ne diffère guère de i, et j est toujours très petit. Nous supposerons que C est le plus grand moment d'inertie.

Il est évident, à cause de :

$$k^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$

que k est *la somme des aires sur le plan invariable.*

En outre, dans l'équation :

$$u = \gamma,$$

γ est *la somme des aires sur le plan des* $\xi\eta$, c'est-à-dire *sur le plan de l'écliptique.*

Enfin, la formule :

$$s = Cr,$$

nous donne *la somme des aires sur le plan des* xy, c'est-à-dire *sur l'équateur.*

On a donc, en vertu des théorèmes sur les projections :

$$\gamma = k \cos i,$$
$$s = k \cos j,$$

et l'on pourra remplacer γ et s par ces valeurs dans les équations (8), i et j étant supposés constants.

On a ainsi les équations suivantes :

$$u = \gamma = k \cos i,$$
$$s = k \cos j,$$
$$v = \frac{k}{\sin\theta}(1 - \cos^2 i - \cos^2 j + 2\cos i \cos j \cos\theta - \cos^2\theta)^{\frac{1}{2}},$$

dans lesquelles les constantes seront k, $\cos i$ et $\cos j$.

Nous aurons alors :

$$\begin{aligned} V &= k(\psi \cos j + \varphi \cos i) + \int v d\theta \\ &= k(\psi \cos j + \varphi \cos i) + k\int \frac{Q d\theta}{\sin\theta}, \end{aligned}$$

en posant :

$$Q = (1 - \cos^2 i - \cos^2 j + 2\cos i \cos j \cos\theta - \cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}.$$

80. Lorsque nous aurons déterminé l'intégrale $\int \frac{Q d\theta}{\sin\theta}$, nous pourrons trouver les trois dernières intégrales du problème.

On peut prendre pour *éléments normaux*, c'est-à-dire pour les trois constantes arbitraires :

$$h, \cos i \quad \text{et} \quad \cos j.$$

On appelle *éléments normaux* les quantités γ, h, k qui satisfont aux conditions :

$$(\gamma, h) = 0, \ (h, k) = 0, \ (\gamma, k) = 0;$$

toute combinaison de ces trois éléments forme aussi des éléments normaux.

Il est facile de s'assurer que k est une fonction des éléments h, $\cos i$ et $\cos j$: en effet, l'équation :

$$s^2 = \frac{C}{C-A}(k^2 - 2Ah) = k^2\cos^2 j,$$

nous donne :

$$k^2 = \frac{2ACh}{C-(C-A)\cos^2 j}. \qquad (9)$$

Lorsque la fonction V sera connue, les intégrales du problème seront données par les équations :

$$\frac{\partial V}{\partial h} = t - t_0, \quad \frac{\partial V}{\partial . \cos i} = \alpha, \quad \frac{\partial V}{\partial . \cos j} = \beta,$$

α, β, t_0 étant de nouvelles constantes que l'on appelle les *éléments conjugués* respectivement à $\cos i$, $\cos j$ et h.

81. Cherchons maintenant l'intégrale $\int \frac{Qd\theta}{\sin\theta}$ qui entre dans V. On a :

$$\int \frac{Qd\theta}{\sin\theta} = \int \frac{\sin\theta d\theta}{Q} \cdot \frac{1-\cos^2 i - \cos^2 j + 2\cos i\cos j\cos\theta - \cos^2\theta}{\sin^2\theta},$$

ou bien :

$$\int \frac{Qd\theta}{\sin\theta} = \int \frac{\sin\theta d\theta}{Q}\left\{1 - \frac{1}{2}\frac{(\cos j - \cos i)^2}{1-\cos\theta} - \frac{1}{2}\frac{(\cos j + \cos i)^2}{1+\cos\theta}\right\}.$$

Nous aurons donc à calculer les trois intégrales suivantes :

$$1^\circ \quad \int \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{1-\cos^2 i - \cos^2 j + 2\cos i\cos j\cos\theta - \cos^2\theta}}.$$

En posant $\cos\theta = u$, cette intégrale se ramène à la suivante :

$$\int \frac{-du}{\sqrt{\sin^2 i\sin^2 j - (u - \cos i\cos j)^2}} = \text{arc cos}\,\frac{u - \cos i\cos j}{\sin i\sin j}$$

$$= \text{arc cos}\,\frac{\cos\theta - \cos i\cos j}{\sin i\sin j}.$$

2° $$\int \frac{\sin\theta d\theta}{(1-\cos\theta)\sqrt{1-\cos^2 i-\cos^2 j+2\cos i\cos j\cos\theta-\cos^2\theta}}.$$

En posant $1-\cos\theta = z$, cette intégrale se ramène à la suivante :

$$\int \frac{\frac{dz}{z^2}}{\sqrt{-\frac{(\cos j-\cos i)^2}{z^2}-\left\{1-\frac{2}{z}(1-\cos i\cos j)\right\}}},$$

ou bien, en posant $\frac{1}{z}=v$:

$$\int \frac{-dv}{\sqrt{-1+\left(\frac{1-\cos i\cos j}{\cos j-\cos i}\right)^2-\left\{v(\cos j-\cos i)-\frac{1-\cos i\cos j}{\cos j-\cos i}\right\}^2}},$$

ou bien encore, en posant :

$$v(\cos j-\cos i)-\frac{1-\cos i\cos j}{\cos j-\cos i}=t\sqrt{\left(\frac{1-\cos i\cos j}{\cos j-\cos i}\right)^2-1},$$

il vient :

$$\int \frac{-dt}{(\cos j-\cos i)\sqrt{1-t^2}}$$

$$=\frac{1}{\cos j-\cos i}\operatorname{arc\,cos}\frac{v(\cos j-\cos i)^2-1+\cos i\cos j}{\sqrt{(1-\cos i\cos j)^2-(\cos j-\cos i)^2}}$$

$$=\frac{1}{\cos j-\cos i}\operatorname{arc\,cos}\frac{\frac{(\cos j-\cos i)^2}{1-\cos\theta}-1+\cos i\cos j}{\sin i\sin j}.$$

3° $$\int \frac{\sin\theta d\theta}{(1+\cos\theta)\sqrt{1-\cos^2 i-\cos^2 j+2\cos i\cos j\cos\theta-\cos^2\theta}}.$$

En opérant de la même manière que pour la précédente, on trouve que cette intégrale se réduit à :

$$-\frac{1}{\cos j+\cos i}\operatorname{arc\,cos}\frac{\frac{(\cos j+\cos i)^2}{1+\cos\theta}-1-\cos i\cos j}{\sin i\sin j}.$$

On a donc :

$$\left.\begin{aligned}\int \frac{Qd\theta}{\sin\theta} &= \arc\cos\frac{\cos\theta - \cos i\cos j}{\sin i \sin j}\\ &- \frac{1}{2}(\cos j - \cos i)\arccos\frac{\dfrac{(\cos j-\cos i)^2}{1-\cos\theta} - 1 + \cos i\cos j}{\sin i\sin j}\\ &+ \frac{1}{2}(\cos j + \cos i)\arccos\frac{\dfrac{(\cos j+\cos i)^2}{1+\cos\theta} - 1 - \cos i\cos j}{\sin i\sin j} + K,\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

K étant une fonction arbitraire de h, i, j.

82. On peut simplifier cette expression de l'intégrale par la considération du triangle sphérique abc. En effet, en désignant par Θ, I, J les trois côtés opposés aux angles $\pi - \theta$, i, j, nous aurons :

$$\left.\begin{aligned}\cos I &= \frac{\cos i - \cos j\cos\theta}{\sin j\sin\theta},\\ \cos J &= \frac{\cos j - \cos i\cos\theta}{\sin i\sin\theta},\\ \cos\theta &= \cos i\cos j - \sin i\sin j\cos\Theta.\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

On tire de cette dernière :

$$\frac{\cos\theta - \cos i\cos j}{\sin i\sin j} = -\cos\Theta.$$

D'autre part, on a dans un triangle sphérique, en désignant par α, β, γ les angles, et par a, b, c les côtés opposés :

$$\cos(a+b) = \frac{\dfrac{(\cos\alpha + \cos\beta)^2}{1-\cos\gamma} - 1 - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta},$$

$$\cos(a-b) = \frac{-\dfrac{(\cos\alpha - \cos\beta)^2}{1+\cos\gamma} + 1 - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Pour appliquer ces formules au triangle abc, on doit poser :

$$\alpha = j, \quad \beta = i, \quad \gamma = \pi - \theta,$$
$$a = \mathrm{J}, \quad b = \mathrm{I}, \quad c = \Theta;$$

par suite,

$$\cos \gamma = -\cos \theta.$$

On a alors :

$$\frac{\dfrac{(\cos j - \cos i)^2}{1 - \cos \theta} - 1 + \cos i \cos j}{\sin i \sin j} = -\cos(\mathrm{I} - \mathrm{J}),$$

$$\frac{\dfrac{(\cos j + \cos i)^2}{1 + \cos \theta} - 1 - \cos i \cos j}{\sin i \sin j} = \cos(\mathrm{I} + \mathrm{J}).$$

Par conséquent,

$$\left.\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{Q}d\theta}{\sin \theta} &= \operatorname{arc}\cos(-\cos \Theta) \\ &- \frac{1}{2}(\cos j - \cos i) \operatorname{arc}\cos\Big(-\cos(\mathrm{I} - \mathrm{J})\Big) \\ &+ \frac{1}{2}(\cos j + \cos i) \operatorname{arc}\cos\Big(\cos(\mathrm{I} + \mathrm{J})\Big) + \mathrm{K} \\ &= \pi - \Theta - \frac{1}{2}(\cos j - \cos i) \left\{ \pi - (\mathrm{I} - \mathrm{J}) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2}(\cos j + \cos i)(\mathrm{I} + \mathrm{J}) + \mathrm{K}. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

83. Dans la suite des calculs que nous venons de faire, nous avons conservé au radical le signe $+$. En réalité, nous aurions dû prendre le signe $\pm$. Il nous reste à examiner maintenant quel est celui des deux signes que nous devons adopter.

Mais, avant de faire cette discussion, nous devons observer que l'on peut encore donner aux expressions de u, v, s que nous avons trouvées précédemment (n° **77**), savoir :

$$u = \mathrm{A}p \sin \theta \sin \psi + \mathrm{B}q \sin \theta \cos \psi + \mathrm{C}r \cos \theta,$$
$$v = \mathrm{A}p \cos \psi - \mathrm{B}q \sin \psi,$$
$$s = \mathrm{C}r,$$

une forme remarquable qui nous sera utile dans quelques instants pour la discussion du signe de Q.

On a, en effet,

$$\left.\begin{aligned} v &= \mathrm{A}p\cos\psi - \mathrm{B}q\sin\psi \\ &= \mathrm{A}\cos\psi\,(\cos\psi\,.\,\theta' + \sin\psi\sin\theta\,.\,\varphi') \\ &\quad + \mathrm{B}\sin\psi\,(\sin\psi\,.\,\theta' - \cos\psi\sin\theta\,.\,\varphi') \\ &= \mathrm{A}\cos^2\psi\,.\,\theta' + \mathrm{B}\sin^2\psi\,.\,\theta' + (\mathrm{A}-\mathrm{B})\sin\psi\cos\psi\sin\theta\,.\,\varphi' \\ &= \mathrm{A}\theta'\,\frac{1+\cos 2\psi}{2} + \mathrm{B}\theta'\,\frac{1-\cos 2\psi}{2} + \frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}\sin 2\psi\sin\theta\,.\,\varphi' \\ &= \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}\,\theta' + \frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}\left\{\theta'\cos 2\psi + \varphi'\sin 2\psi\sin\theta\right\}; \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

$$s = \mathrm{C}r = \mathrm{C}(\psi' + \varphi'\cos\theta); \qquad (14)$$

$$\left.\begin{aligned} u &= \mathrm{A}p\sin\theta\sin\psi + \mathrm{B}q\sin\theta\cos\psi + \mathrm{C}r\cos\theta \\ &= \mathrm{A}\sin\theta\sin\psi(\cos\psi\,.\,\theta' + \sin\psi\sin\theta\,.\,\varphi') \\ &\quad + \mathrm{B}\sin\theta\cos\psi(-\sin\psi\,.\,\theta' + \cos\psi\sin\theta\,.\,\varphi') \\ &\quad + \mathrm{C}\cos\theta(\psi' + \varphi'\cos\theta) \\ &= \mathrm{A}\theta'\sin\psi\cos\psi\sin\theta - \mathrm{B}\theta'\sin\psi\cos\psi\sin\theta + \mathrm{A}\varphi'\sin^2\theta\sin^2\psi \\ &\quad + \mathrm{B}\varphi'\sin^2\theta\cos^2\psi + \mathrm{C}\cos\theta(\psi' + \varphi'\cos\theta) \\ &= \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}\sin^2\theta\,.\,\varphi' - \frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}\sin^2\theta\cos 2\psi\,.\,\varphi' \\ &\quad + \frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}\sin 2\psi\sin\theta\,.\,\theta' + \mathrm{C}\cos\theta(\psi' + \varphi'\cos\theta) \\ &= \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}\,\varphi'\sin^2\theta + \mathrm{C}\cos\theta(\psi' + \varphi'\cos\theta) \\ &\quad + \frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}\sin\theta(\theta'\sin 2\psi - \varphi'\cos 2\psi\sin\theta). \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Cela posé, revenons à la discussion du signe de Q. A cet effet, observons d'abord que, d'après l'hypothèse que nous avons admise, k est une quantité positive, puisque c'est une aire.

D'autre part, la formule (13) nous donne, en y faisant $\mathrm{A} = \mathrm{B}$

$$v = \mathrm{A}\theta'.$$

Par conséquent, v a le même signe que θ'.

Or, de la formule :

$$\cos\theta = \cos i \cos j - \sin i \sin j \cos\Theta,$$

où l'on suppose, comme dans la figure 4, que les angles i et j sont tous les deux aigus, il résulte évidemment que θ est compris entre $i - j$ et $i + j$, puisque cos Θ est compris entre $+1$ et -1. En effet, pour $\cos\Theta = +1$, on a :

$$\cos\theta = \cos i \cos j - \sin i \sin j = \cos(i + j),$$

et pour $\cos\Theta = -1$, on a :

$$\cos\theta = \cos i \cos j + \sin i \sin j = \cos(i - j).$$

Or, θ étant compris entre $i - j$ et $i + j$, il en résulte, puisque i et j sont aigus, que sin θ est toujours positif.

Par suite, dans l'expression de v :

$$v = \frac{kQ}{\sin\theta},$$

le radical Q aura le même signe que v. Donc, Q aura le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que θ' sera positif ou négatif, c'est-à-dire suivant que θ croît ou décroît.

Or, si nous reprenons la formule :

$$\cos\theta = \cos i \cos j - \sin i \sin j \cos\Theta,$$

nous en concluons que θ décroît ou croît, suivant que Θ est compris entre 0 et π, ou non.

En effet, lorsque Θ augmente de 0 à π :

1° De $\Theta = 0$, à $\Theta = \frac{\pi}{2}$, cos Θ diminue; donc cos θ augmente, et, par conséquent, θ diminue;

2° De $\Theta = \frac{\pi}{2}$, à $\Theta = \pi$, cos Θ est négatif, et il augmente en valeur numérique; donc cos θ augmente encore, et, par suite, θ diminue.

Il résulte de là que, dans le cas de la figure, puisque Θ est $< \pi$, θ décroît; par suite, θ' est négatif, et, par conséquent, Q sera négatif. Donc, dans ce cas, le radical doit avoir le signe $-$.

Nous aurons donc alors :

$$\int \frac{Q\, d\theta}{\sin\theta} = -\pi + \Theta + \frac{\cos j - \cos i}{2} \{\pi - (I - J)\}$$
$$- \frac{\cos j + \cos i}{2}(I + J) + K.$$

On peut choisir la quantité arbitraire K, de manière à détruire la partie constante, et l'on aura :

$$\left.\begin{aligned}\int \frac{Q\, d\theta}{\sin\theta} &= \Theta + \frac{\cos j - \cos i}{2}(J - I) - \frac{\cos j + \cos i}{2}(I + J) \\ &= \Theta - J\cos i - I\cos j.\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Par conséquent,

$$\left.\begin{aligned}V &= k(\psi \cos j + \varphi \cos i) + k(\Theta - J\cos i - I\cos j) \\ &= k\{(\varphi - J)\cos i + (\psi - I)\cos j + \Theta\}.\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Les intégrales du problème sont alors :

$$\frac{\partial V}{\partial h} = t - t_0, \quad \frac{\partial V}{\partial \cos i} = \alpha, \quad \frac{\partial V}{\partial \cos j} = \beta.$$

84. Pour former les premiers membres de ces équations nous devons remarquer que I, J, Θ ne renferment pas h; k contient h et $\cos j$, et ne renferme pas $\cos i$:

On a donc, en vertu de l'équation :

$$k^2 = \frac{2ACh}{C - (C - A)\cos^2 j}, \quad (9)$$

$$k\frac{\partial k}{\partial h} = \frac{AC}{C - (C - A)\cos^2 j};$$

d'où :

$$\frac{\partial k}{\partial h} = \frac{k}{2h}.$$

D'autre part,

$$\frac{\partial k}{\partial \cos i} = 0,$$

$$k\frac{\partial k}{\partial \cos j} = \frac{2ACh(C - A)\cos j}{\{C - (C - A)\cos^2 j\}^2},$$

d'où :

$$\frac{\partial k}{\partial \cos j} = \frac{2ACh(C - A)\cos j}{k . \frac{4A^2C^2h^2}{k^4}} = \frac{(C - A)k^3 \cos j}{2ACh}.$$

On a donc :

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \left[(\varphi - J)\cos i + (\psi - I)\cos j + \Theta\right]\frac{\partial k}{\partial h},$$

et la première intégrale du problème est :

$$t - t_0 = \frac{k}{2h}\left\{(\varphi - J)\cos i + (\psi - I)\cos j + \Theta\right\}.$$

On a aussi, pour les deux autres intégrales :

$$\alpha = \frac{\partial V}{\partial \cos i} = k(\varphi - J) - k\cos i\frac{\partial J}{\partial \cos i} - k\cos j\frac{\partial I}{\partial \cos i} + k\frac{\partial \Theta}{\partial \cos i},$$

et

$$\beta = \frac{\partial V}{\partial \cos j} = k(\psi - I) - k\cos i\frac{\partial J}{\partial \cos j} - k\cos j\frac{\partial I}{\partial \cos j} + k\frac{\partial \Theta}{\partial \cos j}$$
$$+ \left\{(\varphi - J)\cos i + (\psi - I)\cos j + \Theta\right\}\frac{\partial k}{\partial \cos j}.$$

Afin de transformer ces deux dernières intégrales, nous avons besoin de certaines formules que nous allons faire connaître.

De la formule :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha,$$

on tire, en considérant les côtés comme des fonctions des angles α, β, γ :

$$-\sin a\frac{\partial a}{\partial \cos \beta} = -\sin b \cos c\frac{\partial b}{\partial \cos \beta} - \cos b \sin c\frac{\partial c}{\partial \cos \beta}$$
$$+ \sin b \cos c \cos \alpha\frac{\partial c}{\partial \cos \beta} + \cos b \sin c \cos \alpha\frac{\partial b}{\partial \cos \beta};$$

d'où :

$$\sin a\frac{\partial a}{\partial \cos \beta} = (\sin b \cos c - \sin c \cos b \cos \alpha)\frac{\partial b}{\partial \cos \beta}$$
$$+ (\sin c \cos b - \sin b \cos c \cos \alpha)\frac{\partial c}{\partial \cos \beta}.$$

Or, on a :

$$\sin b \cos c - \sin c \cos b \cos \alpha = \sin a \cos \gamma,$$

$$\sin c \cos b - \sin b \cos c \cos \alpha = \sin a \cos \beta.$$

En effet, de la formule :

$$\operatorname{cotg} c \sin b = \cos b \cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{cotg} \gamma,$$

on tire :

$$\cos c \sin b = \cos b \cos \alpha \sin c + \frac{\sin \alpha \cos \gamma}{\sin \gamma} \sin c;$$

mais, on a :

$$\frac{\sin \alpha \sin c}{\sin \gamma} = \sin a,$$

donc :

$$\cos c \sin b = \cos b \cos \alpha \sin c + \sin a \cos \gamma;$$

donc, enfin,

$$\frac{\partial a}{\partial \cos \beta} = \cos \gamma \frac{\partial b}{\partial \cos \beta} + \cos \beta \frac{\partial c}{\partial \cos \beta}.$$

De même,

$$\frac{\partial a}{\partial \cos \gamma} = \cos \gamma \frac{\partial b}{\partial \cos \gamma} + \cos \beta \frac{\partial c}{\partial \cos \gamma}. \qquad (18)$$

En vertu de ces formules, on a :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial \cos i} &= \cos i \frac{\partial J}{\partial \cos i} + \cos j \frac{\partial I}{\partial \cos i}, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial \cos j} &= \cos i \frac{\partial J}{\partial \cos j} + \cos j \frac{\partial I}{\partial \cos j}. \end{aligned} \right\} \qquad (19)$$

Les trois intégrales du problème sont donc :

$$\left. \begin{aligned} & t - t_0 = \frac{k}{2h} \left\{ (\varphi - J) \cos i + (\psi - I) \cos j + \Theta \right\}, \\ & \alpha = k(\varphi - J), \\ & \beta = k(\psi - I) + \frac{(C - A) k^3 \cos j}{2ACh} \left\{ (\varphi - J) \cos i + (\psi - I) \cos j + \Theta \right\}, \end{aligned} \right\} \qquad (20)$$

dont la dernière peut être mise sous la forme suivante :

$$\beta = k(\psi - I) + \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right) k^2 \cos j \,.\, (t - t_0).$$

On en tire :

$$\left.\begin{aligned}
\varphi - J &= \frac{\alpha}{k}, \\
\psi - I &= \frac{\beta}{k} - \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right) k \cos j \,.\, (t - t_0), \\
\frac{2h}{k}(t - t_0) &= (\varphi - J)\cos i + (\psi - I)\cos j + \Theta \\
&= \frac{\alpha}{k}\cos i + (\psi - I)\cos j + \Theta \\
&= \frac{\alpha}{k}\cos i + \frac{\beta}{k}\cos j - \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right) k \cos^2 j \,.\, (t - t_0) + \Theta.
\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

La dernière nous donne successivement :

$$\left.\begin{aligned}
\Theta &= -\frac{\alpha\cos i + \beta\cos j}{k} + (t - t_0)\left\{\frac{2h}{k} + \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right) k\cos^2 j\right\} \\
&= -\frac{\alpha\cos i + \beta\cos j}{k} + (t - t_0)\left\{\frac{2ACh + (C - A)k^2\cos^2 j}{ACk}\right\} \\
&= -\frac{\alpha\cos i + \beta\cos j}{k} + (t - t_0)\frac{k^2 C}{ACk} \\
&= -\frac{\alpha\cos i + \beta\cos j}{k} + \frac{k}{A}(t - t_0).
\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Les trois équations :

$$\begin{aligned}
\varphi - J &= \frac{\alpha}{k}, \\
\psi - I &= \frac{\beta}{k} - \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right) k \cos j \,.\, (t - t_0), \\
\Theta &= -\frac{\alpha\cos i + \beta\cos j}{k} + \frac{k}{A} \,.\, (t - t_0),
\end{aligned}$$

forment une solution normale du problème.

La dernière nous donne, en la combinant avec la formule :

$$\cos\theta = \cos i \cos j - \sin i \sin j \cos\Theta,$$

$$\cos\theta = \cos i \cos j - \sin i \sin j \cos\left[\frac{k}{A}(t - t_0) - \frac{\alpha\cos i + \beta\cos j}{k}\right],$$

équation qui nous fait connaître θ en fonction explicite de t, et comme I et J sont donnés en fonction explicite de θ, par les formules :

$$\cos I = \frac{\cos i - \cos j \cos\theta}{\sin j \sin\theta},$$

$$\cos J = \frac{\cos j - \cos i \cos\theta}{\sin i \sin\theta},$$

il s'ensuit que les trois variables θ, φ, ψ peuvent être déterminées en fonction explicite du temps t.

L'équation :

$$\varphi - J = \frac{\alpha}{k},$$

exprime que le *plan invariable coupe le plan de l'écliptique suivant une droite fixe,* dont la longitude est $\frac{\alpha}{k}$. En effet, on a (fig. 4) :

$$oa = o\gamma - a\gamma = \varphi - J.$$

85. *Remarque.* — Il est facile de trouver les trois intégrales précédentes par un moyen plus simple.

En effet, de la formule :

$$V = k(\varphi\cos i + \psi\cos j) + k\int\frac{Qd\theta}{\sin\theta},$$

on tire les trois intégrales du problème :

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{k}{2h}\left(\varphi\cos i + \psi\cos j + \int\frac{Qd\theta}{\sin\theta}\right) = t - t_0, \qquad \text{(A)}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \cos i} = k\left(\varphi + \int\frac{\cos j\cos\theta - \cos i}{Q\sin\theta}d\theta\right) = \alpha, \qquad \text{(B)}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \cos j} = \frac{(C-A)k^3\cos j}{2ACh}\left(\varphi\cos i + \psi\cos j + \int\frac{Qd\theta}{\sin\theta}\right)\\ + k\left(\psi + \int\frac{\cos i\cos\theta - \cos j}{Q\sin\theta}d\theta\right) = \beta.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(C)}$$

On peut facilement éliminer $\int \frac{Q d\theta}{\sin\theta}$ entre (A) et (C), et il vient :

$$\psi + \int \frac{\cos i \cos\theta - \cos j}{Q \sin\theta} d\theta = \frac{\beta}{k} - \frac{C - A}{AC} k \cos j . (t - t_0); \quad \text{(D)}$$

en éliminant φ entre (A) et (B), on a :

$$\cos j \left\{ \psi + \int \frac{\cos i \cos\theta - \cos j}{Q \sin\theta} d\theta \right\} + \int \frac{\sin\theta d\theta}{Q} = \frac{2h}{k}(t - t_0) - \frac{\alpha \cos i}{k},$$

et, en combinant cette dernière équation avec (D), on a :

$$\int \frac{\sin\theta d\theta}{Q} = \frac{k}{A}(t - t_0) - \frac{\alpha \cos i + \beta \cos j}{k}. \quad \text{(E)}$$

Nous pouvons prendre les équations (B), (D) et (E) pour les trois intégrales du problème.

Si maintenant nous reprenons la formule :

$$\cos I = \frac{\cos i - \cos j \cos\theta}{\sin j \sin\theta},$$

nous en tirons :

$$- \sin I \frac{dI}{d\theta} = \frac{\sin j \sin^2\theta \cos j - (\cos i - \cos j \cos\theta) \sin j \cos\theta}{\sin^2 j \sin^2\theta}$$

$$= \frac{\cos j - \cos i \cos\theta}{\sin j \sin^2\theta},$$

d'où :

$$dI = \frac{\cos i \cos\theta - \cos j}{\sin I \sin j \sin^2\theta} d\theta.$$

Or, on a :

$$\sin I = \sqrt{1 - \cos^2 I} = \sqrt{\frac{\sin^2 j \sin^2\theta - (\cos i - \cos j \cos\theta)^2}{\sin^2 j \sin^2\theta}}$$

$$= \frac{\sqrt{1 - \cos^2 i - \cos^2 j + 2 \cos i \cos j \cos\theta - \cos^2\theta}}{\sin j \sin\theta};$$

donc,

$$\sin I \sin j \sin\theta = - Q,$$

puisque Q est négatif.

Donc enfin,

$$- dI = \frac{\cos i \cos\theta - \cos j}{Q \sin\theta} d\theta;$$

de même,

$$-dJ = \frac{\cos j \cos \theta - \cos i}{Q \sin \theta} d\theta,$$

$$d\Theta = \frac{\sin \theta d\theta}{Q}.$$

Les formules (B), (D), (E) deviennent alors :

$$\frac{\alpha}{k} = \varphi - \int dJ,$$

$$\frac{\beta}{k} - \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right) k \cos j . (t - t_0) = \psi - \int dI,$$

$$\frac{k}{A}(t - t_0) - \frac{\alpha \cos i + \beta \cos j}{k} = \int d\Theta.$$

Pour déterminer les limites, nous supposerons que l'on prenne pour limite inférieure de θ une valeur qui vérifie l'équation $Q=0$, c'est-à-dire :

$$(\cos \theta - \cos i \cos j)^2 - \sin^2 i \sin^2 j = 0;$$

or, on satisfait à cette équation en posant :

$$\theta = i + j,$$

ce qui nous donne :

$$I = 0, \qquad J = 0, \qquad \Theta = 0,$$

et alors les équations précédentes deviennent :

$$\frac{\alpha}{k} = \varphi - J,$$

$$\frac{\beta}{k} - \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right) k \cos j . (t - t_0) = \psi - I,$$

$$\frac{k}{A}(t - t_0) - \frac{\alpha \cos i + \beta \cos j}{k} = \Theta.$$

Ce sont les formules que nous avons trouvées précédemment par un calcul beaucoup plus long.

Nous ferons cependant observer que la première méthode nous permet de déterminer la fonction V, ce qui ne fait pas la méthode actuelle.

XIV.

Travaux de M. Donkin.

86. Désignons par X une fonction de $q_1, q_2, \dots q_n$ (*), et supposons $p_1, p_2, \dots p_n$ définies par les équations :

$$p_1 = \frac{\partial X}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial X}{\partial q_2}, \quad \dots \quad p_n = \frac{\partial X}{\partial q_n}, \tag{1}$$

de telle sorte que l'on ait les conditions :

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_k} = \frac{\partial p_k}{\partial q_i}. \tag{2}$$

Nous allons démontrer que, si l'on tire des équations (1) les valeurs de $q_1, q_2, \dots q_n$, en fonction de $p_1, p_2, \dots p_n$, on aura la relation :

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_k} = \frac{\partial q_k}{\partial p_i}.$$

En effet, si l'on remplace dans les seconds membres des équations (1), $q_1, q_2, \dots q_n$, par leurs valeurs en fonction de $p_1, p_2, \dots p_n$, ces équations deviennent des identités, et si l'on prend les dérivées par rapport à p_i, il vient :

$$0 = \frac{\partial p_1}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial p_i} + \frac{\partial p_1}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial p_i} + \dots + \frac{\partial p_1}{\partial q_n}\frac{\partial q_n}{\partial p_i},$$

. . . .

$$1 = \frac{\partial p_i}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial p_i} + \frac{\partial p_i}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial p_i} + \dots + \frac{\partial p_i}{\partial q_n}\frac{\partial q_n}{\partial p_i},$$

. . . .

(*) *Philosophical Transactions*, 1854, p. 75; *Report of the British Association for the Advancement of Science*, 1857, p. 32.

ou bien, en vertu des équations (2) :

$$0 = \frac{\partial p_1}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial p_i} + \frac{\partial p_2}{\partial q_1}\frac{\partial q_2}{\partial p_i} + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial q_1}\frac{\partial q_n}{\partial p_i},$$

. . . .

$$1 = \frac{\partial p_1}{\partial q_i}\frac{\partial q_1}{\partial p_i} + \frac{\partial p_2}{\partial q_i}\frac{\partial q_2}{\partial p_i} + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial q_i}\frac{\partial q_n}{\partial p_i},$$

. . . .

multipliant ces équations respectivement par :

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_k}, \quad \frac{\partial q_2}{\partial p_k}, \quad \ldots \quad \frac{\partial q_i}{\partial p_k}, \quad \ldots \quad \frac{\partial q_n}{\partial p_k},$$

et ajoutant, on trouve :

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_k} = \frac{\partial q_k}{\partial p_i}. \qquad (3)$$

Puisque entre q_i, q_k, il existe cette relation (3) analogue à la relation (2), on en conclut le théorème suivant :

Théorème. — *Si l'on déduit des équations* (1) *les quantités* $q_1, q_2, \ldots q_n$, *en fonction de* $p_1, p_2, \ldots p_n$, *les expressions ainsi obtenues seront les coefficients différentiels d'une fonction* Y *de* $p_1, p_2, \ldots p_n$, *et l'on aura :*

$$q_1 = \frac{\partial Y}{\partial p_1}, \quad q_2 = \frac{\partial Y}{\partial p_2}, \quad \ldots, \quad q_n = \frac{\partial Y}{\partial p_n}. \qquad (4)$$

87. Il est facile de trouver la relation qui existe entre les fonctions X et Y.

En effet, les équations (1) et (4) nous donnent :

$$dX = p_1dq_1 + p_2dq_2 + \cdots + p_ndq_n,$$

$$dY = q_1dp_1 + q_2dp_2 + \cdots + q_ndp_n;$$

d'où :

$$d(X + Y) = d(p_1q_1 + p_2q_2 + \cdots + p_nq_n),$$

ou bien, en intégrant et en négligeant la constante ajoutée :

$$X + Y = p_1q_1 + p_2q_2 + \cdots + p_nq_n. \qquad (5)$$

La valeur de Y est donc :

$$Y = -(X) + (q_1)p_1 + (q_2)p_2 + \cdots + (q_n)p_n, \qquad (6)$$

les crochets indiquant que X, $q_1, \ldots q_n$, sont exprimées en fonction de $p_1, p_2, \ldots p_n$; par conséquent, Y sera exprimée en fonction de ces quantités seulement.

88. Si la fonction X, outre les variables $q_1, q_2, \ldots q_n$, renferme encore explicitement une autre quantité quelconque p, il en sera évidemment de même des expressions $(q_1), (q_2), \ldots (q_n)$.

En effet, si X renferme p, il en est de même de $\frac{\partial X}{\partial q_1}, \ldots \frac{\partial X}{\partial q_n}$; par conséquent, si des équations (1) :

$$p_i = \frac{\partial X}{\partial q_i},$$

on tire $(q_1), (q_2), \ldots (q_n)$, c'est-à-dire les valeurs de $q_1, \ldots q_n$, en fonction de $p_1, p_2, \ldots p_n$, ces quantités (q_i) renfermeront aussi p.

Nous aurons donc, en observant que (X) est la valeur de X, dans laquelle on remplace $q_1, q_2, \ldots q_n$ en fonction de $p_1, p_2, \ldots p_n, p$,

$$\frac{\partial(X)}{\partial p} = \frac{\partial X}{\partial p} + \frac{\partial X}{\partial q_1}\frac{\partial(q_1)}{\partial p} + \cdots + \frac{\partial X}{\partial q_n}\frac{\partial(q_n)}{\partial p}$$

$$= \frac{\partial X}{\partial p} + p_1\frac{\partial(q_1)}{\partial p} + \cdots + p_n\frac{\partial(q_n)}{\partial p}.$$

Si nous différentions l'équation (6) par rapport à p, qui y est contenue explicitement, il vient :

$$\frac{\partial Y}{\partial p} = -\frac{\partial(X)}{\partial p} + p_1\frac{\partial(q_1)}{\partial p} + \cdots + p_n\frac{\partial(q_n)}{\partial p},$$

et, à cause de l'équation précédente, on a :

$$\frac{\partial Y}{\partial p} + \frac{\partial X}{\partial p} = 0. \qquad (7)$$

89. Supposons maintenant que X renferme explicitement,

outre les n variables $q_1, q_2, \ldots q_n$, une autre variable t, et n constantes $a_1, a_2, \ldots a_n$, c'est-à-dire que l'on ait :

$$X = \text{fonct.}\,(t, q_1, q_2, \ldots q_n, a_1, a_2, \ldots a_n).$$

Supposons de plus que les n équations :

$$\frac{\partial X}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial X}{\partial a_2} = b_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial X}{\partial a_n} = b_n, \tag{8}$$

soient suffisantes pour déterminer $a_1, a_2, \ldots a_n$, en fonction de $b_1, b_2, \ldots b_n, q_1, q_2, \ldots q_n$.

Si nous posons :

$$p_1 = \frac{\partial X}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial X}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad p_n = \frac{\partial X}{\partial q_n}, \tag{9}$$

et si nous résolvons ces équations par rapport à $q_1, q_2, \ldots q_n$, les a_i restant constantes, nous verrons, comme précédemment (n° 88), que les q_i sont les dérivées par rapport aux p_i d'une fonction :

$$Y = \text{fonct.}\,(t, p_1, p_2, \ldots p_n, a_1, a_2, \ldots a_n),$$

et l'on a :

$$q_1 = \frac{\partial Y}{\partial p_1}, \quad q_2 = \frac{\partial Y}{\partial p_2}, \quad \ldots q_n = \frac{\partial Y}{\partial p_n}. \tag{10}$$

D'ailleurs, dans cette transformation, les a_i sont analogues à la quantité p (n° 88), et nous aurons, en vertu de la formule (7) :

$$\frac{\partial Y}{\partial a_i} + \frac{\partial X}{\partial a_i} = 0,$$

d'où :

$$\frac{\partial Y}{\partial a_i} = -\frac{\partial X}{\partial a_i} = -b_i. \tag{11}$$

90. Si des équations (8) :

$$\frac{\partial X}{\partial a_i} = b_i,$$

on tire les valeurs de $a_1, a_2, \ldots a_n$, en fonction de $b_1, b_2, \ldots b_n$, nous aurons, de la même manière que ci-dessus (n° **87**) :

$$X_b = -(X) + (a_1) b_1 + (a_2) b_2 + \cdots + (a_n) b_n,$$

les crochets indiquant que $X, a_1, a_2, \ldots a_n$, sont exprimées en fonction de $b_1, b_2, \ldots b_n, q_1, q_2, \ldots q_n$. On a donc :

$$X_b = \text{fonct.}\,(t, q_1, q_2, \ldots q_n, b_1, b_2, \ldots b_n),$$

et l'on voit que l'on passe de X à X_b, en exprimant les a_i en fonction des b_i, et en conservant les q_i, de même que l'on passe (n° **89**) de X à Y en exprimant les q_i en fonction des p_i, et en conservant les a_i. Dans cette transformation les a_i, b_i jouent le rôle des q_i, p_i de tantôt (n° **89**) et les q_i le rôle des a_i.

Il s'ensuit que l'on aura :

$$\frac{\partial X_b}{\partial b_i} = a_i, \qquad (12)$$

de même que l'on a (n° **89**) :

$$\frac{\partial Y}{\partial p_i} = q_i. \qquad (10)$$

D'ailleurs, puisque les q_i jouent ici le rôle des a_i (n° **89**), c'est-à-dire de p (n° **88**), on a, d'après la formule (7) :

$$\frac{\partial X_b}{\partial q_i} + \frac{\partial X}{\partial q_i} = 0,$$

d'où :

$$\frac{\partial X_b}{\partial q_i} = -\frac{\partial X}{\partial q_i} = -p_i. \qquad (13)$$

On a aussi, en vertu de la formule (7) :

$$\frac{\partial X_b}{\partial t} = -\frac{\partial X}{\partial t}. \qquad (14)$$

91. Considérons la fonction X_b :

$$X_b = \text{fonct.}\,(t, q_1, q_2, \ldots q_n, b_1, b_2, \ldots b_n),$$

et les équations :

$$\frac{\partial X_b}{\partial q_i} = -p_i.$$

Si, de ces dernières, on tire les q_i en fonction des p_i, les b_i restant constantes, nous aurons la fonction :

$$Y_b = \text{fonct.}\,(t, p_1, p_2, \ldots p_n, b_1, b_2, \ldots b_n).$$

Or, les fonctions X_b et Y_b sont analogues aux fonctions X et Y (n° **89**) à la condition de remplacer p_i par $-p_i$, et a_i par b_i.

Nous aurons donc, en vertu des formules (10) et (11) :

$$\frac{\partial Y_b}{\partial p_i} = -q_i, \tag{15}$$

et

$$\frac{\partial Y_b}{\partial b_i} = -\frac{\partial X_b}{\partial b_i} = -a_i. \tag{16}$$

92. Cela posé, les $2n$ équations (8) et (9), savoir :

$$\frac{\partial X}{\partial a_i} = b_i, \quad \frac{\partial X}{\partial q_i} = p_i,$$

nous permettent de déterminer les $2n$ variables $q_1, q_2, \ldots q_n$, $p_1, p_2, \ldots p_n$, en fonction des $2n$ constantes $a_1, a_2, \ldots a_n, b_1, b_2, \ldots b_n$, et de t, ou réciproquement, les $2n$ constantes en fonction de $q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n$ et t.

Dans le premier cas, les variables p_i, q_i sont données *explicitement* en fonction de la variable t, que nous pouvons considérer comme indépendante ; dans le second cas, elles sont données *implicitement* en fonction de t.

93. Il résulte de ce qui précède que nous pourrons, dans la suite, faire l'une des quatre hypothèses suivantes :

1° Les $2n$ variables p_i, q_i, sont exprimées en fonction de a_i, b_i, t;

2° Les $2n$ constantes a_i, b_i, sont exprimées en fonction de p_i, q_i, t;

3° Les n variables p_i sont exprimées en fonction des n variables q_i, des n constantes a_i, et de t, comme dans :

$$p_i = \frac{\partial X}{\partial a_i}.$$

4° Les n constantes b_i sont exprimées en fonction des n variables q_i, des n constantes a_i, et de t, comme dans :

$$b_i = \frac{\partial X}{\partial q_i}.$$

XV.

Nouvelle démonstration du théorème de Jacobi.

94. Voyons maintenant comment l'on peut obtenir le théorème de Jacobi, en se basant sur les théorèmes qui précèdent.

Soit (Z) une fonction de $q_1, q_2, \ldots q_n, a_1, a_2, \ldots a_n, t$ définie par l'équation :

$$(Z) = -\frac{\partial X}{\partial t},$$

et désignons par Z le résultat que l'on obtient en remplaçant dans (Z), $a_1, a_2, \ldots a_n$ par leurs valeurs en fonction des variables, tirées des équations :

$$p_i = \frac{\partial X}{\partial q_i}.$$

Il est facile de démontrer que le système des équations :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial Z}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial Z}{\partial q_i}, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

exprime le résultat de l'élimination des constantes a_i, b ,entre les équations :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial q_i} = p_i,\\ \frac{\partial X}{\partial a_i} = b_i,\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

et leurs dérivées par rapport à t.

En d'autres termes, les équations (1) forment un système d'équations différentielles simultanées du premier ordre dont les équations (2) sont les intégrales.

En effet, si l'on différentie l'équation :

$$\frac{\partial X}{\partial a_i} = b_i,$$

totalement par rapport à t, il vient :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial a_i \partial t} + \frac{\partial^2 X}{\partial a_i \partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \dots + \frac{\partial^2 X}{\partial a_i \partial q_n}\frac{dq_n}{dt} = 0.$$

Mais, on a :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial a_i \partial q_j} = \frac{\partial}{\partial a_i}\left(\frac{\partial X}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial p_j}{\partial a_i};$$

par suite, l'équation précédente devient :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial a_i \partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial a_i}\frac{dq_1}{dt} + \dots + \frac{\partial p_n}{\partial a_i}\frac{dq_n}{dt} = 0; \qquad (3)$$

les quantités $\frac{\partial p_1}{\partial a_i}$, $\frac{\partial p_2}{\partial a_i}$, ... sont prises en considérant $p_1, p_2, \dots p_n$, comme des fonctions de $a_1, a_2, \dots a_n, q_1, q_2, \dots q_n$ (n° **93**, 3°).

Or, (Z) étant une fonction de $q_1, q_2, \dots q_n, a_1, a_2, \dots a_n, t$, définie par l'équation :

$$(Z) = -\frac{\partial X}{\partial t}, \qquad (4)$$

on a :

$$\frac{\partial (Z)}{\partial a_i} = -\frac{\partial^2 X}{\partial a_i \partial t}:$$

et l'équation (3) nous donne :

$$\frac{\partial(Z)}{\partial a_i} = \frac{\partial p_1}{\partial a_i}\frac{dq_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial a_i}\frac{dq_n}{dt}.$$

Multipliant par $\frac{\partial a_i}{\partial p_j}$, et faisant la somme depuis $i = 1$, jusque $i = n$, il vient :

$$\frac{\partial(Z)}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p} + \frac{\partial(Z)}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial p_j} + \cdots + \frac{\partial(Z)}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial p_j}$$

$$= \left(\frac{\partial p_1}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_j} + \frac{\partial p_1}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial p_j} + \cdots + \frac{\partial p_1}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial p_j}\right)\frac{dq_1}{dt}$$

$$+ \left(\frac{\partial p_2}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_j} + \frac{\partial p_2}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial p_j} + \cdots + \frac{\partial p_2}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial p_j}\right)\frac{dq_2}{dt}$$

. . . .

$$+ \left(\frac{\partial p_j}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_j} + \frac{\partial p_j}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial p_j} + \cdots + \frac{\partial p_j}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial p_j}\right)\frac{dq_j}{dt}$$

. . . .

$$+ \left(\frac{\partial p_n}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_j} + \frac{\partial p_n}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial p_j} + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial p_j}\right)\frac{dq_n}{dt}.$$

Or, tous les coefficients du second membre sont nuls, excepté celui de $\frac{dq_j}{dt}$ qui est égal à l'unité. Quant au premier membre, il est égal à $\frac{\partial Z}{\partial p_j}$, si l'on observe que Z est le résultat que l'on obtient en remplaçant dans (Z) les constantes $a_1, a_2, \ldots a_n$, par leurs valeurs en fonction des variables (n° **93**, 2°), de sorte que Z est une fonction des variables seulement.

On a donc :

$$\frac{\partial Z}{\partial p_j} = \frac{dq_j}{dt},$$

ou bien, en remplaçant la lettre j par la lettre i :

$$\frac{\partial Z}{\partial p_i} = \frac{dq_i}{dt}, \tag{5}$$

équation qui ne renferme pas les constantes.

On a aussi, en considérant p_i comme une fonction de $t, q_1, q_2, \dots q_n$ (n° 93, 3°) :

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial p_i}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \dots + \frac{\partial p_i}{\partial q_n}\frac{dq_n}{dt}.$$

Or, on a :

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = \frac{\partial\left(\frac{\partial X}{\partial q_i}\right)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right) = -\frac{\partial (Z)}{\partial q_i};$$

par conséquent,

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial (Z)}{\partial q_i} + \frac{\partial p_i}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \dots + \frac{\partial p_i}{\partial q_n}\frac{dq_n}{dt},$$

ou bien, à cause de l'équation (5) :

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial (Z)}{\partial q_i} + \frac{\partial p_i}{\partial q_1}\frac{\partial Z}{\partial p_1} + \dots + \frac{\partial p_i}{\partial q_n}\frac{\partial Z}{\partial p_n},$$

ou bien encore, en vertu des équations (2) :

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial (Z)}{\partial q_i} + \frac{\partial p_1}{\partial q_i}\frac{\partial Z}{\partial p_1} + \dots + \frac{\partial p_n}{\partial q_i}\frac{\partial Z}{\partial p_n}.$$

Mais, puisque (Z) n'est autre que Z où l'on a remplacé $p_1, p_2, \dots p_n$ par leurs valeurs (n° 93, 3°), on a :

$$\frac{\partial (Z)}{\partial q_i} = \frac{\partial Z}{\partial q_i} + \frac{\partial Z}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial q_i} + \dots + \frac{\partial Z}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial q_i}.$$

Par suite, il vient :

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial Z}{\partial q_i}, \qquad (6)$$

équation qui ne renferme pas les constantes.

Le système des $2n$ équations (5) et (6) exprime donc le résultat de l'élimination des $2n$ constantes entre les équations :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial q_i} = p_i, \\ \frac{\partial X}{\partial a_i} = b_i, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

et leurs quotients différentiels par rapport à t. Ces équations (2) sont donc les intégrales des équations (5) et (6).

D'ailleurs, la fonction Z sera définie par l'équation :

$$Z = -\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right),$$

$\frac{\partial X}{\partial t}$ étant le quotient différentiel partiel de X par rapport à t, et les crochets indiquant que dans ce quotient différentiel, on a remplacé les constantes $a_1, a_2, \ldots a_n$, par leurs valeurs en fonction des variables, déduites des équations :

$$\frac{\partial X}{\partial q_i} = p_i.$$

XVI.

Formules de Jacobi.

95. Nous venons de voir (n° **94**) que les équations :

$$\frac{\partial X}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial X}{\partial a_i} = b_i,$$

donnent la solution des équations canoniques. Elles sont équivalentes aux équations :

$$a_i = \varphi_i(q_1, \ldots q_n, p_1, \ldots p_n, t),$$
$$b_i = \psi_i(q_1, \ldots q_n, p_1, \ldots p_n, t).$$

Ces équations peuvent être considérées comme exprimant les

$2n$ variables $q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n$, en fonction des $2n$ constantes a_i, b_i et de t, ou bien les $2n$ constantes a_i, b_i en fonction des $2n$ variables p_i, q_i et de t.

Il est facile de démontrer les relations suivantes qui ont été énoncées pour la première fois par Jacobi (*) :

$$\frac{\partial q_k}{\partial a_j} = -\frac{\partial b_j}{\partial p_k}, \quad \frac{\partial q_k}{\partial b_j} = \frac{\partial a_j}{\partial p_k},$$

$$\frac{\partial p_k}{\partial a_j} = \frac{\partial b_j}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial p_k}{\partial b_j} = -\frac{\partial a_j}{\partial q_k}.$$

p_k, q_k étant deux variables correspondantes, et a_j, b_j deux constantes correspondantes.

Pour démontrer la première de ces relations, reprenons l'équation :

$$\frac{\partial X}{\partial a_i} = b_i,$$

dont le premier membre est une fonction de $q_1, q_2, \dots q_n, a_1, a_2, \dots a_n, t$. Les quantités $q_1, q_2, \dots q_n$ peuvent être considérées comme des fonctions de $t, a_1, a_2, \dots a_n, b_1, b_2, \dots b_n$, déduites des n équations :

$$\frac{\partial X}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial X}{\partial a_2} = b_2, \quad \dots \quad \frac{\partial X}{\partial a_n} = b_n.$$

Si l'on suppose $q_1, q_2, \dots q_n$, remplacées par leurs valeurs, l'équation :

$$\frac{\partial X}{\partial a_i} = b_i,$$

devient une identité, et sa dérivée prise par rapport à a_j sera nulle. Nous aurons donc :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial a_i \partial a_j} + \frac{\partial^2 X}{\partial a_i \partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial a_j} + \dots + \frac{\partial^2 X}{\partial a_i \partial q_n}\frac{\partial q_n}{\partial a_j} = 0.$$

(*) Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*, pp. 395 et suivantes.

Remplaçant $\frac{\partial X}{\partial a_j}$ par b_j, et $\frac{\partial X}{\partial q_i}$ par p_i, il vient :

$$\frac{\partial b_j}{\partial a_i} + \frac{\partial p_1}{\partial a_i}\frac{\partial q_1}{\partial a_j} + \frac{\partial p_2}{\partial a_i}\frac{\partial q_2}{\partial a_j} + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial a_i}\frac{\partial q_n}{\partial a_j} = 0,$$

équation qui a lieu pour toutes les valeurs de $i = 1, 2, \ldots n$.

Dans cette équation $\frac{\partial b_j}{\partial a_i}$ se rapporte à l'hypothèse 4° (n° **93**), puisque, en vertu de la formule $b_j = \frac{\partial X}{\partial a_j}$, b_j est une fonction de t, q_i, a_i; $\frac{\partial p_1}{\partial a_i}$, $\frac{\partial p_2}{\partial a_i}$, ... se rapportent à l'hypothèse 3° (n° **93**), puisque, en vertu de la formule $p_i = \frac{\partial X}{\partial q_i}$, p_i est une fonction de t, q_i, a_i; enfin, $\frac{\partial q_1}{\partial a_j}$, $\frac{\partial q_2}{\partial a_j}$, ... se rapportent à l'hypothèse 1° (n° **93**), puisque, en vertu de l'équation $b_i = \frac{\partial X}{\partial a_i}$, q_i est une fonction de t, a_i, b_i.

Multipliant l'équation précédente par $\frac{\partial a_i}{\partial p_k}$, se rapportant à l'hypothèse 2° (n° **93**), et faisant la somme pour toutes les valeurs de i, les indices j et k restant les mêmes, le premier terme du premier membre sera :

$$\frac{\partial b_j}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_k} + \cdots + \frac{\partial b_j}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial p_k} = \frac{\partial b_j}{\partial p_k}. \qquad \text{(n° 93, 2°)}$$

Dans le second terme, le coefficient de $\frac{\partial q_1}{\partial a_j}$ est :

$$\frac{\partial p_1}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_k} + \cdots + \frac{\partial p_1}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial p_k} = \frac{\partial p_1}{\partial p_k} = 0.$$

Tous les autres coefficients sont également nuls, excepté le coefficient de $\frac{\partial q_k}{\partial a_j}$, qui sera :

$$\frac{\partial p_k}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_k} + \cdots + \frac{\partial p_k}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial p_k} = \frac{\partial p_k}{\partial p_k} = 1.$$

On a donc :

$$\frac{\partial b_j}{\partial p_k} + \frac{\partial q_k}{\partial a_j} = 0,$$

ou bien :

$$\frac{\partial b_j}{\partial p_k} = -\frac{\partial q_k}{\partial a_j},$$

ce qui est la première formule de Jacobi. Le premier membre se rapporte à l'hypothèse 2° (n° 93), le second membre à l'hypothèse 1° (n° 93).

Si nous opérons de la même manière sur les équations (10) et (11) (n° 89) :

$$\frac{\partial Y}{\partial p_i} = q_i, \quad \frac{\partial Y}{\partial a_i} = -b_i,$$

nous obtiendrons évidemment un résultat qui se déduit du précédent en changeant p en q, et réciproquement, et en changeant le signe de b. Nous aurons donc :

$$\frac{\partial b_j}{\partial q_k} = \frac{\partial p_k}{\partial a_j},$$

c'est la deuxième formule de Jacobi.

De même, les équations (12) et (13) (n° 90) :

$$\frac{\partial X_b}{\partial q_i} = -p_i, \quad \frac{\partial X_b}{\partial b_i} = a_i,$$

nous donnent, en changeant dans la première formule le signe de p, et en changeant a en b, et réciproquement :

$$\frac{\partial a_j}{\partial p_k} = \frac{\partial q_k}{\partial b_j},$$

c'est la troisième formule de Jacobi.

Enfin, les équations (15) et (16) (n° 91) :

$$\frac{\partial Y_b}{\partial p_i} = -q_i, \quad \frac{\partial Y_b}{\partial b_i} = -a_i,$$

nous donnent, en changeant dans la troisième formule le signe de a, et en changeant p en q, et réciproquement :

$$\frac{\partial a_j}{\partial q_k} = -\frac{\partial p_k}{\partial b_j}.$$

c'est la quatrième formule de Jacobi.

La démonstration que nous venons de donner est due à M. Donkin (*). La démonstration de Jacobi est différente (**).

Remarque. — Dans les équations :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial Z}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial Z}{\partial q_i}, \end{aligned}\right\} \quad \text{(A)}$$

les premiers membres se rapportent à l'hypothèse 1° (n° **93**) ; les seconds membres à l'hypothèse 2° (n° **93**).

Mais les équations :

$$\frac{\partial X}{\partial q_i} = p_i,$$

$$\frac{\partial X}{\partial a_i} = b_i,$$

renferment a_i, b_i exactement de la même manière que p_i, q_i. Il est donc évident que les raisonnements qui nous ont conduits aux équations (A), nous conduiront aux suivantes (***) :

$$\left.\begin{aligned} \frac{da_i}{dt} &= \frac{\partial Z}{\partial b_i}, \\ \frac{db_i}{dt} &= -\frac{\partial Z}{\partial a_i}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(B)}$$

Dans les premiers membres, a_i, b_i se rapportent à l'hypothèse 2° (n° **93**), et sont exprimées en fonction de q_i, p_i, et t ; les seconds membres se rapportent à l'hypothèse 1° (n° **93**).

Observons que, dans les équations (B), Z est la fonction Z des équations (A) dans laquelle on remplace p_i, q_i par leurs valeurs en fonction des a_i, b_i.

(*) *Philosophical Transactions,* 1854, p. 79; *Report of the British Association for the Advancement of Science,* 1857, p. 33.

(**) *Vorlesungen über Dynamik,* pp. 395 et suivantes.

(***) *Philosophical Transactions,* 1855, p. 303.

XVII.

Théorèmes de M. Donkin.

96. Théorème I. — *Si* p *et* q *désignent deux des variables* p_i, q_i, *et si l'on suppose ces variables* p *et* q *exprimées en fonction des* 2n *constantes* a_i, b_i, *et de* t, *nous aurons :*

$$\sum_j \frac{\partial(p, q)}{\partial(a_j, b_j)} = \sum_j \frac{\partial(a_j, b_j)}{\partial(p, q)} = \left\{ \begin{array}{c} \pm 1 \\ 0, \end{array} \right.$$

suivant que p *et* q *sont conjuguées ou non* (*).

En effet, si q_i est une fonction des $2n$ constantes et de t, et si l'on remplace les constantes par leurs valeurs (n° **93**, 2°), en fonction de q_1, q_2, ... q_n, p_1, p_2, ... p_n, t, on obtient une équation identique. Par suite, si l'on différentie par rapport à q_i, q_k et p_k, il vient :

$$1 = \sum_j \left(\frac{\partial q_i}{\partial a_j}\frac{\partial a_j}{\partial q_i} + \frac{\partial q_i}{\partial b_j}\frac{\partial b_j}{\partial q_i}\right),$$

$$0 = \sum_j \left(\frac{\partial q_i}{\partial a_j}\frac{\partial a_j}{\partial q_k} + \frac{\partial q_i}{\partial b_j}\frac{\partial b_j}{\partial q_k}\right),$$

$$0 = \sum_j \left(\frac{\partial q_i}{\partial a_j}\frac{\partial a_j}{\partial p_k} + \frac{\partial q_i}{\partial b_j}\frac{\partial b_j}{\partial p_k}\right);$$

on trouvera des équations analogues, si l'on opère de la même manière sur p_i.

Or, si nous appliquons aux six équations ainsi obtenues les formules de Jacobi (n° **95**), en éliminant les dérivées de a_j et b_j, nous aurons pour la première :

$$1 = \sum_j \left(-\frac{\partial q_i}{\partial a_j}\frac{\partial p_i}{\partial b_j} + \frac{\partial q_i}{\partial b_j}\frac{\partial p_i}{\partial a_j}\right) = \sum_j \frac{\partial(p_i, q_i)}{\partial(a_j, b_j)}.$$

(*) On dit que p et q sont *conjuguées*, lorsqu'elles sont de la forme p_i, q_i; elles ne sont pas conjuguées, si elles sont de la forme p_i, q_k.

Par conséquent, on a :

$$\sum_j \frac{\partial(p, q)}{\partial(a_j, b_j)} = +1, \quad \text{pour} \quad p = p_i,\ q = q_i,$$

et

$$\sum_j \frac{\partial(p, q)}{\partial(a_j, b_j)} = -1, \quad \text{pour} \quad p = q_i,\ q = p_i.$$

On trouvera de la même manière que la deuxième équation nous donne :

$$\sum_j \frac{\partial(p, q)}{\partial(a_j, b_j)} = 0, \quad \text{pour} \quad p = p_k,\ q = q_i,$$

et la troisième nous donne :

$$\sum_j \frac{\partial(p, q)}{\partial(a_j, b_j)} = 0, \quad \text{pour} \quad p = q_i,\ q = q_k,$$

et ainsi de suite.

Pour démontrer la deuxième partie du théorème, il suffira d'éliminer, au moyen des formules de Jacobi (n° **95**), les dérivées de q_i.

La première formule nous donne :

$$1 = \sum_j \left(-\frac{\partial b_j}{\partial p_i}\frac{\partial a_j}{\partial q_i} + \frac{\partial a_j}{\partial p_i}\frac{\partial b_j}{\partial q_i} \right) = \sum_j \frac{\partial(a_j, b_j)}{\partial(p_i, q_i)}.$$

On a donc :

$$\sum_j \frac{\partial(a_j, b_j)}{\partial(p, q)} = +1, \quad \text{pour} \quad p = p_i,\ q = q_i,$$

et

$$\sum_j \frac{\partial(a_j, b_j)}{\partial(p, q)} = -1, \quad \text{pour} \quad p = q_i,\ q = p_i.$$

On trouve, de même, au moyen de la deuxième formule :

$$\sum_j \frac{\partial(a_j, b_j)}{\partial(p, q)} = 0, \quad \text{pour} \quad p = p_i,\ q = q_k,$$

et ainsi de suite.

97. THÉORÈME II. — *Si* h *et* k *sont deux quelconques des constantes normales* (*) a_i, b_i, *et si nous supposons ces quantités exprimées en fonction des* p_i, q_i *et de* t, *nous aurons :*

$$\sum_j \frac{\partial(h, k)}{\partial(p_j, q_j)} = \sum_j \frac{\partial(p_j, q_j)}{\partial(h, k)} = \begin{cases} \pm 1 \\ \quad 0, \end{cases}$$

suivant que h *et* k *sont conjuguées ou non* (**).

En effet, si nous supposons a_i, b_i exprimées en fonction des variables q_i, p_i et de t (n° **93**, 2°), et si nous remplaçons les variables par leurs valeurs en fonction des a_i, b_i et de t (n° **93**, 1°), on obtient des identités. Par suite, si l'on différentie par rapport à a_i, la valeur de a_i, par exemple, il vient :

$$1 = \sum_j \left(\frac{\partial a_i}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial a_i} + \frac{\partial a_i}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial a_i}\right),$$

ou bien, en remplaçant les dérivées des q et des p, au moyen des formules de Jacobi (n° **95**) :

$$1 = \sum_j \left(-\frac{\partial a_i}{\partial q_j}\frac{\partial b_i}{\partial p_j} + \frac{\partial a_i}{\partial p_j}\frac{\partial b_i}{\partial q_j}\right) = \sum_j \frac{\partial(a_i, b_i)}{\partial(p_j, q_j)}.$$

Par conséquent, on a :

$$\sum_j \frac{\partial(h, k)}{\partial(p_j, q_j)} = +1, \quad \text{pour} \quad h = a_i,\ k = b_i,$$

et

$$\sum_j \frac{\partial(h, k)}{\partial(p_j, q_j)} = -1, \quad \text{pour} \quad h = b_i,\ k = a_i.$$

De même, on trouverait :

$$\sum_j \frac{\partial(h, k)}{\partial(p_j, q_j)} = 0, \quad \text{pour} \quad h = a_i,\ k = b_k,$$

et ainsi de suite.

(*) Nous donnons le nom de *constantes normales* aux constantes a_1, a_2, ... a_n, b_1, b_2, ... b_n, obtenues en appliquant les méthodes précédentes à l'intégration des équations canoniques.

(**) On dit que h et k sont *conjuguées*, lorsqu'elles sont de la forme a_i, b_i; elles ne sont pas conjuguées, si elles sont de la forme a_i, b_k.

Pour démontrer la deuxième partie du théorème, il suffit de remplacer les dérivées de a_i au moyen des formules de Jacobi (n° 95), et l'on trouve facilement :

$$\sum_j \frac{\partial(p_j, q_j)}{\partial(h, k)} = \pm 1 \quad \text{ou} \quad 0,$$

suivant que h et k sont conjuguées ou non.

98. Il résulte du second théorème que l'on a, en employant la notation de Poisson (n° 69) :

$$(a_i, b_i) = -(b_i, a_i) = -1,$$
$$(a_i, b_j) = 0, \quad (a_i, a_j) = 0, \quad (b_i, b_j) = 0;$$

d'ailleurs, on a identiquement :

$$(a_i, a_i) = 0, \quad (b_i, b_i) = 0.$$

En d'autres termes, on a :

$$(h, k) = \begin{cases} \mp 1 \\ 0, \end{cases}$$

suivant que h et k sont conjuguées ou non.

99. Désignons maintenant par f, g deux fonctions des $2n$ constantes normales a_i, b_i, et soient :

$$f = \varphi(a_1, a_2, \ldots a_n, b_1, b_2, \ldots b_n),$$
$$g = \psi(a_1, a_2, \ldots a_n, b_1, b_2, \ldots b_n).$$

Si l'on suppose $a_1, a_2, \ldots a_n, b_1, b_2, \ldots b_n$, remplacées par leurs valeurs en fonction des $2n$ variables et de t (n° 93, 2°), alors f et g deviendront des fonctions des variables (*), et si l'on désigne par h, k deux quelconques des constantes a_i, b_i, il vient :

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(p_i, q_i)} = \sum \frac{\partial(f, g)}{\partial(h, k)} \frac{\partial(h, k)}{\partial(p_i, q_i)}$$

(*) f et g seront des intégrales des équations canoniques.

la sommation se rapportant à h, k et s'étendant à toutes les combinaisons binaires des constantes.

Il est facile de vérifier cette formule : en effet, on a :

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(p_i\, q_i)} = \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}.$$

Or, on a évidemment :

$$\frac{\partial f}{\partial p_i} = \frac{\partial f}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial b_1}\frac{\partial b_1}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial b_2}\frac{\partial b_2}{\partial p_i} + \cdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} = \frac{\partial f}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial b_1}\frac{\partial b_1}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial b_2}\frac{\partial b_2}{\partial q_i} + \cdots,$$

etc.;

et il est facile d'en conclure la formule ci-dessus.

Si maintenant nous faisons la somme par rapport à i, il vient :

$$-(f, g) = \sum \left\{ -(h, k)\frac{\partial(f, g)}{\partial(h, k)} \right\},$$

la somme se rapportant à h, k comme ci-dessus.

Mais, à cause des formules de Donkin (n° 97), on a :

$$(h, k) = 0,$$

à moins que h, k ne soient conjuguées, et alors on a :

$$(h, k) = \mp 1.$$

Par suite,

$$(f, g) = -\sum_i \frac{\partial(f, g)}{\partial(a_i,\, b_i)},$$

formule que l'on peut écrire sous la forme suivante :

$$\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right) = -\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial a_i}\frac{\partial g}{\partial b_i} - \frac{\partial f}{\partial b_i}\frac{\partial g}{\partial a_i}\right).$$

L'expression du second membre étant une fonction des con-

stantes a_i, b_i seulement, l'équation précédente nous donne le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si*

$$f = \varphi(q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n, t),$$

$$g = \psi(q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n, t),$$

sont deux intégrales des équations simultanées :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial Z}{\partial q_i},$$

l'expression :

$$(f, g) = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right),$$

est constante, c'est-à-dire que si l'on remplace p_i, q_i *par leurs valeurs en fonction des constantes et de* t, *l'expression* (f, g) *se réduit à une fonction des constantes arbitraires, ne renfermant pas le temps* t.

XVIII.

Extension des méthodes d'Hamilton au cas où les liaisons sont des fonctions du temps.

100. Les recherches d'Hamilton exigeaient que la fonction $H = T - U$ fût indépendante du temps, la fonction T étant une fonction homogène et du second degré de $q'_1, q'_2, \dots q'_n$. Nous allons voir maintenant que la fonction T peut renfermer explicitement le temps t (*), sans que l'on ait rien à modifier aux théories précédentes. Il en résultera donc que ces théories s'appliqueront à un problème auquel l'intégrale des forces vives n'est pas applicable.

(*) DONKIN, *Philosophical Transactions*, 1854.

Reprenons l'équation du mouvement (n° 9) :

$$\frac{d \cdot \frac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}, \tag{A}$$

U étant une fonction de $q_1, q_2, \ldots q_n$, qui peut renfermer explicitement le temps, mais non les q'_i.

Nous avons vu qu'en posant (n° 10) :

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial q'_i},$$

on peut ramener les n équations (A) à un système de $2n$ équations du premier ordre (n° 15). Mais la démonstration que nous avons donnée précédemment exige que T soit une fonction homogène et du second ordre des q'_i.

On peut traiter la question de la manière suivante, sans faire aucune hypothèse sur la forme de la fonction T.

Posons, à cet effet,

$$T + U = W;$$

nous aurons, puisque U ne renferme pas les q'_i :

$$\frac{\partial T}{\partial q'_i} = \frac{\partial W}{\partial q'_i},$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i};$$

l'équation (A) devient :

$$\frac{d \cdot \frac{\partial W}{\partial q'_i}}{dt} = \frac{\partial W}{\partial q_i}. \tag{B}$$

Posons :

$$\frac{\partial W}{\partial q'_i} = p_i \; (*),$$

(*) Cette formule est analogue aux formules (1) (n° 86) :

$$\frac{\partial X}{\partial q_i} = p_i^1,$$

q_i est remplacé par q'_i.

et considérons la fonction :

$$Z = -(W) + p_1(q_1') + p_2(q_2') + \cdots + p_n(q_n'), \qquad (C)$$

dans laquelle nous supposons (W), (q_i'), ... (q_n'), exprimées en fonction de $q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n$ (*).

Nous aurons, en appliquant les formules (4), (6) et (7) (nos **86, 87** et **88**), dans lesquelles nous devrons remplacer q_i par q_i'; et p par q_i (**) :

$$q_i' = \frac{\partial Z}{\partial p_i}. \qquad (D)$$

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = -\frac{\partial Z}{\partial q_i}.$$

Par suite, l'équation (B) devient :

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial Z}{\partial q_i}. \qquad (E)$$

Les équations (D) et (E) ont donc la même forme que les équations canoniques, c'est-à-dire qu'elles sont de la forme :

$$\left. \begin{aligned} q_i' &= \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial p_i}, \\ p_i' &= \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial Z}{\partial q_i}. \end{aligned} \right|$$

Il en résulte qu'il n'y aura pas de restriction à faire en ce qui concerne la forme de la fonction T.

101. *Remarque.* — Dans le cas particulier où T est une fonction homogène et du second degré de $q_1', q_2', \ldots q_n'$, on a :

$$2T = p_1q_1' + p_2q_2' + \cdots + p_nq_n',$$

d'où :

$$Z = -(T + U) + 2T = T - U.$$

(*) Les q_i jouent ici le rôle que jouait la quantité p dans la formule (7) (n° **88**).

(**) Cela résulte de la comparaison de la formule (C) avec la formule (6) (n° **87**).

102. Considérons maintenant le système de $2n$ équations différentielles simultanées du premier ordre :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial Z}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial Z}{\partial q_i}, \end{aligned}\right| \tag{1}$$

Z étant une fonction de $q_1, \ldots q_n, p_1, \ldots p_n, t$.

Une intégrale de ce système est une équation :

$$U = \alpha,$$

dans laquelle α est une constante, et U une fonction de t, q_i, p_i, telle que la dérivée totale $\frac{dU}{dt}$ soit nulle en vertu des équations (1).

Cherchons la condition à laquelle doit satisfaire la fonction U pour être une intégrale. On a :

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial U}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}\right).$$

On a donc, en posant $\frac{dU}{dt} = 0$, et ayant égard aux équations (1) :

$$0 = \frac{\partial U}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\frac{\partial Z}{\partial p_i} - \frac{\partial U}{\partial p_i}\frac{\partial Z}{\partial q_i}\right),$$

ou bien :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (U, Z) = 0. \tag{2}$$

Toute fonction U satisfaisant à cette équation (2), donnera, en l'égalant à une constante, une intégrale du système (1).

103. *Remarque.* — Il est facile de voir que l'*équation* Z = const., *ne sera une intégrale des équations* (1) *que si la fonction* Z *ne renferme pas explicitement le temps.*

En effet, si Z = *const.* est une intégrale, la fonction Z doit vérifier l'équation (2), et nous aurons :

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + (Z, Z) = 0.$$

Or, (Z, Z) est identiquement nulle; par conséquent, on devrait avoir :

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = 0,$$

c'est-à-dire que Z ne devrait pas renfermer explicitement le temps t.

On conclut de là que, dans le cas où Z est une fonction du temps, l'équation $Z = const.$ n'est pas une intégrale des équations (1).

104. Théorème de M. Liouville. — *Si, par un moyen quelconque, on peut déterminer* n *intégrales du système* (1) :

$$\varphi_1 = a_1,\ \varphi_2 = a_2,\ ..,\ \varphi_n = a_n, \tag{3}$$

renfermant n *constantes arbitraires, et satisfaisant aux* $\frac{n(n-1)}{2}$ *conditions :*

$$(\varphi_i, \varphi_k) = 0, \quad \text{ou} \quad (a_i, a_k) = 0, \tag{4}$$

pour les valeurs 1, 2, ... n *de* i *et de* k, *on pourra facilement obtenir les* n *autres intégrales.*

A cet effet, on déduira des n *équations* (3), *les valeurs de* $p_1, p_2, \ldots p_n$, *en fonction de* $q_1, q_2, \ldots q_n, a_1, \ldots a_n, t$, *et on les substituera dans l'expression :*

$$dV = p_1 dq_1 + \cdots + p_n dq_n - (Z)dt, \tag{5}$$

laquelle sera une différentielle exacte, (Z) *désignant comme précédemment le résultat que l'on obtient en substituant dans* Z *les valeurs de* $p_1, \ldots p_n$, *tirées des équations* (3), *de sorte que* (Z) *est une fonction de* $q_1, \ldots q_n, a_1, \ldots a_n, t$.

En intégrant l'expression (5), *on obtient la fonction* V, *et alors les* n *autres intégrales du système* (1) *s'obtiennent en égalant à des constantes les dérivées de la fonction* V, *prises par rapport aux constantes* $a_1, \ldots a_n$.

Demonstration. — 1° L'expression :

$$p_1 dq_1 + \cdots + p_n dq_n - (Z)\,dt,$$

est une différentielle exacte. En effet, d'après ce que nous avons vu (n° 70), la condition :

$$(a_i, a_k) = 0,$$

n'est autre que la condition d'intégrabilité :

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_k} = \frac{\partial p_k}{\partial q_i}, \tag{6}$$

de l'expression :

$$p_1 dq_1 + \cdots + p_n dq_n.$$

Il nous reste à prouver que l'on a :

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{\partial (Z)}{\partial q_i}.$$

Or, en vertu de la définition de (Z), on a :

$$\frac{\partial (Z)}{\partial q_i} = \frac{\partial Z}{\partial q_i} + \frac{\partial Z}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial q_i} + \frac{\partial Z}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial Z}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial q_i},$$

ou bien, en ayant égard aux équations (1) et aux conditions d'intégrabilité (6) :

$$\frac{\partial (Z)}{\partial q_i} = -\frac{dp_i}{dt} + \frac{dq_1}{dt}\frac{\partial p_i}{\partial q_1} + \frac{dq_2}{dt}\frac{\partial p_i}{\partial q_2} + \cdots + \frac{dq_n}{dt}\frac{\partial p_i}{\partial q_n}. \tag{7}$$

Mais, d'autre part, comme, en vertu des équations (3), p_i est une fonction de t, q_1, ... q_n, on a :

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial p_i}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial p_i}{\partial q_n}\frac{dq_n}{dt},$$

et, par conséquent, l'équation (7) nous donne :

$$\frac{\partial (Z)}{\partial q_i} = -\frac{\partial p_i}{\partial t}.$$

On a donc :

$$V = \int (p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n - (Z)\,dt) + \gamma, \tag{8}$$

γ étant une constante arbitraire.

Cette fonction V nous donne les équations :

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \ \dots \ \frac{\partial V}{\partial q_n} = p_n, \ \frac{\partial V}{\partial t} = -(Z), \tag{9}$$

dont les n premières sont évidemment équivalentes aux équations (3), c'est-à-dire que les valeurs de $p_1, \dots p_n$, déduites de ces équations, sont les mêmes que celles que l'on tire des équations (3). La dernière est une identité.

2° Les n autres intégrales du problème sont données par les équations :

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, \ \frac{\partial V}{\partial a_2} = b_2, \ \dots \ \frac{\partial V}{\partial a_n} = b_n. \tag{10}$$

Il suffit de démontrer que leurs dérivées totales par rapport à t sont nulles, en vertu des équations (1).

Or, on a :

$$\frac{d . \frac{\partial V}{\partial a_i}}{dt} = \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial a_i}}{\partial t} + \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial a_i}}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \dots + \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial a_i}}{\partial q_n} \frac{dq_n}{dt}$$

$$= \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial t}}{\partial a_i} + \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial q_1}}{\partial a_i} \frac{dq_1}{dt} + \dots + \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial q_n}}{\partial a_i} \frac{dq_n}{dt}.$$

Si l'on tient compte des équations (1) et (9), il vient :

$$\frac{d . \frac{\partial V}{\partial a_i}}{dt} = -\frac{\partial (Z)}{\partial a_i} + \frac{\partial Z}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial a_i} + \dots + \frac{\partial Z}{\partial p_n} \frac{\partial p_n}{\partial a_i}.$$

Mais (Z) n'est autre que Z dans laquelle on a remplacé $p_1, \dots p_n$, en fonction de $q_1, \dots q_n, a_1, \dots a_n, t$; et d'ailleurs, Z ne renferme pas explicitement les a_i.

Nous aurons donc :

$$\frac{\partial (Z)}{\partial a_i} = \frac{\partial Z}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial a_i} + \dots + \frac{\partial Z}{\partial p_n} \frac{\partial p_n}{\partial a_i};$$

par conséquent,

$$\frac{d.\frac{\partial V}{\partial a_i}}{dt} = 0.$$

Il en résulte donc que :

$$\frac{\partial V}{\partial a_i} = const. = b_i,$$

est une intégrale des équations (1) pour toutes les valeurs de i égales à 1, 2, ... n. Par suite, les équations (9) et (10) :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i,$$

forment la solution complète du problème (*).

105. *Remarque.* — On pourrait résoudre le problème beaucoup plus simplement, même sans connaître les n premières intégrales, si l'on parvenait, par un moyen quelconque, à déterminer la fonction V. Les $2n$ intégrales seraient données par les $2n$ équations :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i,$$

dont les n premières sont équivalentes aux équations (3).

Or, cette fonction V peut être trouvée comme une *intégrale complète* d'une certaine équation aux dérivées partielles du premier ordre.

En effet, d'après ce que nous avons vu, l'équation :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (Z) = 0,$$

doit être identiquement vérifiée par la fonction V.

(*) Ce théorème a été communiqué, en 1853, par M. Liouville au Bureau des longitudes (*Journal de Liouville,* t. XX, p. 137); *Connaissance des temps,* 1853; Donkin, *Philosophical Transactions,* 1854, p. 85; Imschenetsky, *Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles,* pp. 161 ss.

Dans cette équation, (Z) n'est autre que la fonction Z dans laquelle on aurait remplacé $p_1, \ldots p_n$, par leurs valeurs tirées des équations :

$$\varphi_1 = a_1, \quad \ldots \quad \varphi_n = a_n.$$

Mais ces valeurs sont équivalentes à $\frac{\partial V}{\partial q_1}, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_n}$.

Par conséquent, (Z) n'est autre que Z dans laquelle on aurait remplacé $p_1, p_2, \ldots p_n$, par les valeurs de $\frac{\partial V}{\partial q_1}, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_n}$. Il en résulte donc que la fonction V, renfermant n constantes arbitraires, doit rendre identique le premier membre de l'équation :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + F\left(t, q_1, \ldots q_n, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) = 0. \qquad (11)$$

Par conséquent, V doit être une solution complète de cette équation aux dérivées partielles du premier ordre non linéaire. Cette équation est facile à former, puisqu'il suffit de remplacer dans la fonction Z ou F, les quantités $p_1, p_2, \ldots p_n$, par les quotients différentiels $\frac{\partial V}{\partial q_1}, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_n}$.

106. Nous venons de voir que la fonction V qui donne les intégrales du système canonique au moyen des équations :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i,$$

est *une* solution complète de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + F\left(t, q_1, \ldots q_n, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) = 0. \qquad (11)$$

Il est facile de démontrer que *toute* solution complète, *quelle qu'elle soit,* de cette équation aux dérivées partielles, satisfait à la question, c'est-à-dire que, si l'on connaît une solution complète *quelconque* V de cette équation, les intégrales du système canonique sont exprimées par les équations (*) :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i.$$

(*) Donkin, *Philosophical Transactions,* 1854.

Supposons, en effet, cette solution complète V connue, et posons :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i,$$

l'équation (11) devient :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + F(t, q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n) = 0. \qquad (12)$$

Différentiant par rapport à q_i, il vient :

$$\frac{\partial \frac{\partial V}{\partial t}}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial q_i} + \dots + \frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial q_i} = 0. \qquad (13)$$

Or, on a :

$$\frac{\partial \frac{\partial V}{\partial t}}{\partial q_i} = \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial q_i}}{\partial t} = \frac{\partial p_i}{\partial t};$$

d'ailleurs :

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_k} = \frac{\partial p_k}{\partial q_i}.$$

Par suite, l'équation (13) nous donne :

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial p_i}{\partial q_1} + \dots + \frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial p_i}{\partial q_n} = 0; \qquad (14)$$

d'autre part, on a :

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial p_i}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \dots + \frac{\partial p_i}{\partial q_n}\frac{dq_n}{dt}. \qquad (15)$$

Ajoutant (14) et (15), on trouve :

$$\frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial q_i} = \frac{\partial p_i}{\partial q_1}\left(\frac{dq_1}{dt} - \frac{\partial F}{\partial p_1}\right) + \dots + \frac{\partial p_i}{\partial q_n}\left(\frac{dq_n}{dt} - \frac{\partial F}{\partial p_n}\right).$$

Par conséquent, les n équations :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \dots n,$$

dans lesquelles :

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i},$$

renferment comme conséquences les n équations :

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad \text{pour } i = 1, 2, \ldots n$$

Il reste à démontrer que les équations :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_i},$$

sont des conséquences des équations :

$$\frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i.$$

Or, si nous prenons la dérivée totale de l'équation :

$$\frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i,$$

par rapport à t, nous trouvons :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial q_n}\frac{dq_n}{dt} = 0;$$

d'autre part, en différentiant l'équation (12) par rapport à a_i, il vient, en ayant égard aux équations $p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}$:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial t} + \frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial q_1} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial q_n} = 0.$$

De ces deux dernières équations on déduit la suivante :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial q_1}\left(\frac{dq_1}{dt} - \frac{\partial F}{\partial p_1}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial q_2}\left(\frac{dq_2}{dt} - \frac{\partial F}{\partial p_2}\right) + \cdots = 0,$$

laquelle nous donne n équations analogues.

Or, de ces n équations on conclut que l'on a les n relations :

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad \text{pour } i=1,\ 2,\ \ldots n,$$

ou bien que le déterminant des n^2 quantités :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial q_k}=\frac{\partial \frac{\partial V}{\partial q_k}}{\partial a_i},$$

est nul. Mais cette dernière condition exprimerait (n° 50) qu'il existe entre les $\frac{\partial V}{\partial q_k}$ une relation indépendante de a_1, ... a_n, c'est-à-dire que l'on peut éliminer les n constantes a_1, ... a_n, des n équations :

$$\frac{\partial V}{\partial q_k}=\psi_k(q_1, \ldots q_n, a_1, \ldots a_n, t),$$

ce qui est contraire à l'hypothèse que V est une solution complète de l'équation (11) (*).

Donc, si V est une solution complète quelconque de l'équation (11), les équations :

$$\frac{\partial V}{\partial a_i}=b_i,$$

jointes aux équations :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i}=p_i,$$

renferment comme conséquences les équations :

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial F}{\partial p_i},$$

(*) En effet, on sait que si V est une solution complète, elle renfermera, outre la constante additive, n constantes arbitraires a_1, ... a_n, telles que l'on ne puisse les éliminer toutes entre les $n+1$ équations obtenues en différentiant V par rapport à q_1, ... q_n, t, sans faire usage de toutes ces équations (n° 52).

et celles-ci renferment encore les équations :

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_i},$$

dans lesquelles :

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}.$$

Donc, si l'on peut trouver une intégrale complète *quelconque* de l'équation (11), la question sera résolue, et l'on aura les $2n$ intégrales du problème par de simples différentiations.

107. *Cas particulier.* — Lorsque Z *ne renferme pas explicitement le temps* t, l'équation $Z = h$ est, comme on sait (n° **103**), une des intégrales du système (1).

On peut alors supposer que l'équation $Z = h$ est une des n intégrales données, au moyen desquelles on définit la fonction principale V, de manière que :

$$h, a_1, a_2, \dots a_{n-1},$$

soient les n constantes arbitraires. Cela étant, si les conditions :

$$(a_i, a_j) = 0, \quad (h, a_i) = 0,$$

sont satisfaites, nous aurons identiquement :

$$(Z) = h,$$

puisque Z doit se réduire à h, quand on y remplace $p_1, p_2, \dots p_n$, par leurs valeurs tirées des n intégrales (*).

L'équation :

$$dV = p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n - (Z)\,dt,$$

(*) (Z) est le résultat que l'on obtient en remplaçant dans Z les quantités $p_1, p_2, \dots p_n$, par leurs valeurs tirées des n équations $\varphi_1 = a_1, \dots Z = h$. Or, si dans l'une quelconque de ces équations, par exemple $Z = h$, on remplace $p_1, p_2, \dots p_n$, par leurs valeurs, cette équation devient une identité; donc, (Z) est identiquement égal à h.

nous donne alors :

$$dV = p_1dq_1 + p_2dq_2 + \cdots + p_ndq_n - hdt;$$

d'où :

$$V = -ht + \psi,$$

ψ étant une fonction ne renfermant pas explicitement le temps; en effet, Z ne renfermant pas explicitement le temps, il en sera de même de $p_1, p_2, \dots p_n$.

La solution du problème se simplifie alors de la manière suivante :

Les $2n$ équations :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i,$$

sont remplacées par d'autres que nous allons chercher.

De l'équation :

$$V = -ht + \psi,$$

on tire :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{\partial \psi}{\partial q_i};$$

par suite, les n premières intégrales peuvent être remplacées par les n équations :

$$\frac{\partial \psi}{\partial q_i} = p_i.$$

Les n intégrales restantes, qui sont données, en général, par les équations :

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \tau, \quad \frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i, \quad (i = 1, 2, \dots n-1),$$

τ étant la constante conjuguée à h, deviennent, en remplaçant V par sa valeur :

$$\frac{\partial \psi}{\partial h} = t + \tau, \quad \frac{\partial \psi}{\partial a_i} = b_i, \quad (i = 1, 2, \dots n-1).$$

Quant à la fonction ψ, il est facile de voir qu'elle satisfait à l'équation différentielle partielle :

$$F\left(q_1, q_2, \dots q_n, \frac{\partial\psi}{\partial q_1}, \frac{\partial\psi}{\partial q_2}, \dots \frac{\partial\psi}{\partial q_n}\right) = h,$$

dans laquelle :

$$F(q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n),$$

est la valeur de Z en fonction des $2n$ variables p_i, q_i.

Cette équation différentielle partielle se déduit facilement de l'équation (11). En effet, de l'équation :

$$V = -ht + \psi,$$

on tire :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -h,$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{\partial\psi}{\partial q_i}.$$

Par conséquent, l'équation (11) se transforme, dans le cas actuel, en la suivante :

$$-h + F\left(q_1, q_2, \dots q_n, \frac{\partial\psi}{\partial q_1}, \frac{\partial\psi}{\partial q_2}, \dots \frac{\partial\psi}{\partial q_n}\right) = 0,$$

ou bien :

$$F\left(q_1, q_2, \dots q_n, \frac{\partial\psi}{\partial q_1}, \frac{\partial\psi}{\partial q_2}, \dots \frac{\partial\psi}{\partial q_n}\right) = h.$$

Le cas particulier que nous venons d'examiner se présente lorsque l'*intégrale des forces vives existe.* L'équation $Z = h$ est alors l'intégrale des forces vives, et h est la constante des forces vives.

108. *Remarque I.* — Comme nous l'avons vu précédemment (n° **98**), lorsque les intégrales des équations canoniques sont :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i,$$

si l'on met ces équations sous la forme :

$$a_i = \varphi_i(q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n, t),$$
$$b_i = \psi_i(q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n, t),$$

on a :

$$(a_i, b_i) = -1, \ (a_i, b_j) = 0,$$
$$(b_i, a_i) = +1, \text{ etc.}$$

Nous appellerons un système de $2n$ intégrales pour lesquelles ces conditions sont remplies, une ***solution normale***, ou un système d'***intégrales normales***. Les $2n$ constantes arbitraires contenues dans un tel système seront appelées ***éléments normaux***. Une paire a_i, b_i s'appelle des ***éléments conjugués*** (n° **97**).

Dans le cas considéré en dernier lieu, où Z ne renferme pas explicitement le temps t, h et τ sont des éléments conjugués, ces lettres étant employées au lieu de a et b uniquement pour des raisons particulières.

109. *Remarque II.* — Il faut encore observer ici que les $2n$ intégrales des équations canoniques (1) peuvent être obtenues sous une autre forme que :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i,$$

et alors, si les équations :

$$\alpha = \varphi(q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n, t),$$
$$\beta = \psi(q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n, t),$$

sont deux intégrales obtenues par un moyen quelconque, c'est-à-dire sans employer les théorèmes de M. Liouville et de M. Donkin, on n'aura plus :

$$(\alpha, \beta) = \pm 1 \quad \text{ou} \quad = 0.$$

Mais il est facile de s'assurer, comme nous le verrons plus loin, que l'on aura, en vertu des équations canoniques :

$$(\alpha, \beta) = const.,$$

de sorte que, si (α, β) est une fonction de $q_1, q_2, \ldots q_n$, $p_1, p_2, \ldots p_n$, t, on obtiendra, en posant :

$$(\alpha, \beta) = const.,$$

une nouvelle intégrale des équations (1).

Si l'on a identiquement $(\alpha, \beta) = const.$, alors les intégrales α et β sont des intégrales qui ne diffèrent des intégrales normales que par un multiplicateur. Nous reviendrons d'ailleurs sur ce point dans les chapitres suivants.

XIX.

Théorèmes de Lagrange et de Poisson.

110. Reprenons les équations canoniques :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

dans lesquelles :

$$H = f(t, q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n).$$

Les intégrales de ces équations au nombre de $2n$, contiennent $2n$ constantes, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$. On peut résoudre ces équations intégrales par rapport aux variables p_i, q_i, en fonction des α_i, β_i et de t, ou bien par rapport aux constantes α_i, β_i, en fonction des p_i, q_i et de t.

Théorème de Lagrange. — *Les intégrales étant résolues par rapport aux variables* p_i, q_i, *on a la relation :*

$$\frac{\partial p_1}{\partial \alpha}\frac{\partial q_1}{\partial \beta} - \frac{\partial p_1}{\partial \beta}\frac{\partial q_1}{\partial \alpha} + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial \alpha}\frac{\partial q_n}{\partial \beta} - \frac{\partial p_n}{\partial \beta}\frac{\partial q_n}{\partial \alpha} = const.,$$

ou bien, en employant la notation de M. Donkin (n° 69) :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial(p_i, q_i)}{\partial(\alpha, \beta)} = const.$$

Cette relation peut s'écrire sous la forme symbolique :

$$[\alpha, \beta] = const.$$

Démonstration. — Considérons la fonction H, et supposons que l'on y remplace les variables q_i, p_i, en fonction de t et des $2n$ constantes, parmi lesquelles se trouvent α et β : cela posé, la démonstration du théorème de Lagrange repose sur l'identité :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{\partial^2 H}{\partial\beta\partial\alpha}.$$

On a :

$$\frac{\partial H}{\partial\alpha} = \sum\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial\alpha} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial\alpha}\right),$$

ou bien, en vertu des équations canoniques (1) :

$$\frac{\partial H}{\partial\alpha} = \sum\left(-\frac{dp_i}{dt}\frac{\partial q_i}{\partial\alpha} + \frac{dq_i}{dt}\frac{\partial p_i}{\partial\alpha}\right);$$

par suite,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial\alpha\partial\beta} = \sum\left\{\begin{matrix} -\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial p_i}{\partial\beta}\right)\dfrac{\partial q_i}{\partial\alpha} - \dfrac{dp_i}{dt}\dfrac{\partial^2 q_i}{\partial\alpha\partial\beta} \\ +\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial q_i}{\partial\beta}\right)\dfrac{\partial p_i}{\partial\alpha} + \dfrac{dq_i}{dt}\dfrac{\partial^2 p_i}{\partial\alpha\partial\beta} \end{matrix}\right\}.$$

On trouve de la même manière :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial\beta\partial\alpha} = \sum\left\{\begin{matrix} -\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial p_i}{\partial\alpha}\right)\dfrac{\partial q_i}{\partial\beta} - \dfrac{dp_i}{dt}\dfrac{\partial^2 q_i}{\partial\alpha\partial\beta} \\ +\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial q_i}{\partial\alpha}\right)\dfrac{\partial p_i}{\partial\beta} + \dfrac{dq_i}{dt}\dfrac{\partial^2 p_i}{\partial\alpha\partial\beta} \end{matrix}\right\}.$$

En égalant ces deux expressions, il vient :

$$\sum\left\{\begin{matrix} -\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial p_i}{\partial\beta}\right)\dfrac{\partial q_i}{\partial\alpha} + \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial q_i}{\partial\beta}\right)\dfrac{\partial p_i}{\partial\alpha} \\ +\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial p_i}{\partial\alpha}\right)\dfrac{\partial q_i}{\partial\beta} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial q_i}{\partial\alpha}\right)\dfrac{\partial p_i}{\partial\beta} \end{matrix}\right\} = 0.$$

Or, cette dernière équation n'est autre que :

$$\frac{d}{dt}[\alpha, \beta] = 0;$$

par conséquent, on a :

$$[\alpha, \beta] = const.,$$

et le théorème de Lagrange est démontré.

Remarque. — Dans le cas particulier où α et β sont des constantes normales a_i, b_i, nous avons vu (n° 97) que l'on a :

$$[\alpha, \beta] = \begin{cases} \pm 1 \\ 0, \end{cases}$$

suivant que α et β sont conjuguées ou non.

111. Théorème de Poisson. — La démonstration du théorème de Poisson repose sur deux lemmes que nous allons faire connaître :

Lemme I. — *Si l'on désigne par φ, ψ deux fonctions quelconques des variables* $t, q_1, \ldots q_n, p_1, \ldots p_n$, *et si l'on prend la dérivée partielle de l'expression (φ, ψ) par rapport à l'une quelconque de ces variables que nous désignerons par ξ, on a :*

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial\xi} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}, \psi\right) + \left(\varphi, \frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right) \text{(*)}.$$

En effet, de la formule :

$$(\varphi, \psi) = \sum \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\frac{\partial\psi}{\partial p_i} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\right),$$

on tire :

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial\xi} = \sum \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_i\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial p_i} + \frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\frac{\partial^2\psi}{\partial p_i\partial\xi} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial p_i\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial q_i} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial^2\psi}{\partial q_i\partial\xi}\right);$$

(*) Donkin, *Philosophical Transactions*, 1854, p. 92; Imschenetsky, pp. 53 et suivantes.

Or,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_i \partial \xi} = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right).$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial \xi} = \sum \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\psi}{\partial q_i} \\ + \frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right) - \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right) \end{array} \right\} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}, \psi\right) + \left(\varphi, \frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right).$$

C'est la formule énoncée.

LEMME II. — *Si φ, ψ, θ sont trois fonctions quelconques des variables* t, q_1, ... q_n, p_1, ... p_n, *on a la relation :*

$$\big(\varphi, (\psi, \theta)\big) + \big(\psi, (\theta, \varphi)\big) + \big(\theta, (\varphi, \psi)\big) = 0.$$

En effet, le premier membre nous donne, en le développant :

$$\sum \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\frac{\partial(\psi,\theta)}{\partial p_i} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial(\psi,\theta)}{\partial q_i} + \frac{\partial\psi}{\partial q_i}\frac{\partial(\theta,\varphi)}{\partial p_i} - \frac{\partial\psi}{\partial p_i}\frac{\partial(\theta,\varphi)}{\partial q_i} \\ \qquad + \frac{\partial\theta}{\partial q_i}\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial p_i} - \frac{\partial\theta}{\partial p_i}\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial q_i} \end{array} \right\}$$

$$= \sum \left[\begin{array}{l} \frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial p_i}, \theta\right) + \left(\psi, \frac{\partial\theta}{\partial p_i}\right)\right\} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_i}, \theta\right) + \left(\psi, \frac{\partial\theta}{\partial q_i}\right)\right\} \\ + \frac{\partial\psi}{\partial q_i}\left\{\left(\frac{\partial\theta}{\partial p_i}, \varphi\right) + \left(\theta, \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\right)\right\} - \frac{\partial\psi}{\partial p_i}\left\{\left(\frac{\partial\theta}{\partial q_i}, \varphi\right) + \left(\theta, \frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\right)\right\} \\ + \frac{\partial\theta}{\partial q_i}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}, \psi\right) + \left(\varphi, \frac{\partial\psi}{\partial p_i}\right)\right\} - \frac{\partial\theta}{\partial p_i}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}, \psi\right) + \left(\varphi, \frac{\partial\psi}{\partial q_i}\right)\right\} \end{array} \right].$$

Or, il est facile de voir que tous les termes se détruisent deux à deux. Ainsi, par exemple, dans le premier terme on trouve des expressions de la forme :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial p_i \partial q_k}\frac{\partial\theta}{\partial p_k} - \frac{d^2\psi}{\partial p_i \partial p_k}\frac{\partial\theta}{\partial q_k} + \frac{\partial\psi}{\partial q_k}\frac{\partial^2\theta}{\partial p_i \partial p_k} - \frac{\partial\psi}{\partial p_k}\frac{\partial^2\theta}{\partial p_i \partial q_k}\right\}.$$

Les deux premiers termes de la parenthèse sont détruits le premier par un terme de $\frac{\partial\theta}{\partial p_i}\left(\varphi, \frac{\partial\psi}{\partial q_i}\right)$, le second par un terme

de $\frac{\partial\theta}{\partial q_i}\left(\varphi, \frac{\partial\psi}{\partial p_i}\right)$; les deux derniers termes sont détruits respectivement par un terme de $\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\left(\frac{\partial\theta}{\partial p_i}, \varphi\right)$ et par un terme de $\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\left(\frac{\partial\theta}{\partial q_i}, \varphi\right)$.

On peut résumer ce qui précède en remarquant que l'expression proposée étant développée, chaque terme se compose d'un coefficient différentiel du second ordre de l'une des trois fonctions φ, ψ, θ, multiplié par un coefficient différentiel du premier ordre de chacune des deux autres. Par exemple, les termes où φ est différentié deux fois sont de la forme :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_i \partial p_k}\frac{\partial\psi}{\partial q_k}\frac{\partial\theta}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial q_i \partial q_k}\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\frac{\partial\theta}{\partial p_k}, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial p_i \partial p_k}\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\frac{\partial\theta}{\partial q_k},$$

k pouvant être égal à i; chacun de ces termes provient du second et du troisième terme de l'expression proposée.

Or, on voit facilement que, pour chaque terme provenant du second terme, il y a un terme semblable en signe contraire provenant du troisième terme.

Le même raisonnement s'appliquant aux termes dans lesquels ψ et θ sont différentiés deux fois, l'expression proposée sera identiquement nulle, et la formule est démontrée.

Rappelons encore que si l'on pose :

$$\alpha = \varphi(t, q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n),$$
$$\beta = \psi(t, q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n),$$

on a, en vertu de la notation de Poisson (n° 69) :

$$(\alpha, \alpha) = 0, \quad (\beta, \beta) = 0, \quad (\alpha, \beta) = -(\beta, \alpha),$$
$$(-\alpha, \beta) = -(\alpha, \beta).$$

Rappelons aussi que, si u est une fonction de t, q_1, ... q_n, p_1, ... p_n, nous aurons :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum\left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}\right),$$

ou bien, en ayant égard aux équations canoniques (1) :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum\left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial u}{\partial t} + (u, H). \qquad (2)$$

Cela posé, on a le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soient α, β deux intégrales quelconques* (*) *du système canonique, contenant chacune une constante, et résolues par rapport à ces constantes :*

$$\alpha = \varphi(t, q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n),$$

$$\beta = \psi(t, q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n),$$

l'expression :

$$(\alpha, \beta) = \sum \left(\frac{\partial \alpha}{\partial q_i}\frac{\partial \beta}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha}{\partial p_i}\frac{\partial \beta}{\partial q_i}\right),$$

sera constante pendant toute la durée du mouvement (**).

Pour démontrer ce théorème, il suffit de prouver que l'on a :

$$\frac{d(\alpha, \beta)}{dt} = 0,$$

en vertu des équations canoniques.

Or, on a, en remplaçant u par (α, β) dans la formule (2) :

$$\frac{d(\alpha, \beta)}{dt} = \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial t} + \big((\alpha, \beta), \mathrm{H}\big) = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \beta\right) + \left(\alpha, \frac{\partial \beta}{\partial t}\right) + \big((\alpha, \beta), \mathrm{H}\big).$$

Mais nous avons vu que, si α, β sont des intégrales des équations canoniques, on a (n° **102**) :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + (\alpha, \mathrm{H}) = 0,$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} + (\beta, \mathrm{H}) = 0.$$

(*) Pour abréger, nous appelons intégrale α, l'intégrale :

$$\alpha = \varphi(t, q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n).$$

(**) *Mécanique analytique de Lagrange,* t. I, note 7; JACOBI, *Vorlesungen über Dynamik,* pp. 421 et 426; DONKIN, *Philosophical Transactions,* 1854, p. 93.

Par conséquent,

$$\frac{d(\alpha,\beta)}{dt} = -\big((\alpha,\mathrm{H}),\beta\big) - \big(\alpha,(\beta,\mathrm{H})\big) + \big((\alpha,\beta),\mathrm{H}\big)$$
$$= \big((\mathrm{H},\alpha),\beta\big) + \big((\beta,\mathrm{H}),\alpha\big) + \big((\alpha,\beta),\mathrm{H}\big).$$

Or, le dernier membre de cette formule est identiquement nul ; par conséquent,

$$\frac{d(\alpha,\beta)}{dt} = 0,$$

et, par suite,

$$(\alpha,\beta) = const.,$$

ce qui démontre le théorème de Poisson.

112. Ainsi donc, en résumé, si α, β sont deux intégrales des équations canoniques, on a toujours :

$$(\alpha,\beta) = const.$$

Mais, cette équation peut avoir lieu : 1° ou bien identiquement ; 2° ou bien non identiquement.

1° L'expression (α, β) peut être identiquement nulle, ou elle peut se réduire identiquement à une constante déterminée, et l'on peut toujours faire en sorte que cette constante soit l'unité : il suffit pour cela de multiplier ou diviser l'une des intégrales α, β par un facteur convenable.

Si α, β sont deux *intégrales normales,* nous avons vu que (α, β) est égale à l'unité ou à zéro, suivant que α et β sont conjuguées ou non (n° **97**).

2° Si l'équation $(\alpha, \beta) = const.$ n'est pas identiquement satisfaite, c'est-à-dire si elle n'a lieu qu'en vertu des équations canoniques, alors la constante du second membre sera une *constante arbitraire,* et l'équation :

$$(\alpha,\beta) = const.,$$

sera, comme nous le verrons dans la suite, une intégrale des équations canoniques. Mais il peut ici se présenter deux cas :

Premier cas : Ou bien la fonction (α, β) peut être seulement

une combinaison des seconds membres des intégrales α et β, et alors l'équation :

$$(\alpha, \beta) = const.,$$

n'est pas une intégrale nouvelle, mais seulement une combinaison des deux intégrales α et β.

Second cas : Ou bien la fonction (α, β) est une fonction de $t, q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n$, indépendante de α et β, et alors l'équation :

$$(\alpha, \beta) = const.,$$

est une ***nouvelle intégrale*** qui ne résulte pas d'une combinaison des deux autres.

Dans ce dernier cas seulement, le théorème de Poisson permet de trouver une nouvelle intégrale, lorsque l'on en connaît deux.

118. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$, m intégrales quelconques, et soient f, g deux fonctions de $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$, de manière que f, g soient aussi deux intégrales. Il est facile de démontrer que l'on a :

$$(f, g) = \sum \frac{\partial(f, g)}{\partial(\alpha_i, \alpha_j)} (\alpha_i, \alpha_j),$$

la somme s'étendant à toutes les combinaisons binaires des m constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$.

En effet, on a :

$$(f, g) = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right);$$

Or,

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} = \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial q_i} + \dots + \frac{\partial f}{\partial \alpha_m} \frac{\partial \alpha_m}{\partial q_i},$$

$$\frac{\partial f}{\partial p_i} = \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial p_i} + \dots + \frac{\partial f}{\partial \alpha_m} \frac{\partial \alpha_m}{\partial p_i},$$

$$\frac{\partial g}{\partial q_i} = \frac{\partial g}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial q_i} + \dots + \frac{\partial g}{\partial \alpha_m} \frac{\partial \alpha_m}{\partial q_i},$$

$$\frac{\partial g}{\partial p_i} = \frac{\partial g}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial p_i} + \frac{\partial g}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial p_i} + \dots + \frac{\partial g}{\partial \alpha_m} \frac{\partial \alpha_m}{\partial p_i}.$$

En substituant et réduisant, il vient :

$$(f, g) = \sum \frac{\partial(f, g)}{\partial(\alpha_i, \alpha_j)} (\alpha_i, \alpha_j). \tag{3}$$

D'après cela, si $k_1, k_2, \ldots k_m$ sont m fonctions, telles que f, g, des m constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$, nous aurons pour une paire de ces fonctions :

$$(k_p, k_q) = \sum \frac{\partial(k_p, k_q)}{\partial(\alpha_i, \alpha_j)} (\alpha_i, \alpha_j), \tag{4}$$

la somme se rapportant aux combinaisons binaires de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$, c'est-à-dire aux indices i et j.

114. Nous pouvons déduire de là les équations inverses que l'on obtient en considérant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ comme des fonctions de $k_1, k_2, \ldots k_m$. Nous trouverons ces équations inverses en raisonnant de la même manière que ci-dessus, ou bien en multipliant l'équation (4) par $\frac{\partial(\alpha_r, \alpha_s)}{\partial(k_p, k_q)}$, et faisant la somme par rapport à p, q. Nous aurons :

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \sum \frac{\partial(\alpha_i, \alpha_j)}{\partial(k_p, k_q)} (k_p, k_q), \tag{5}$$

la somme se rapportant aux combinaisons binaires de $k_1, k_2, \ldots k_m$.

Cette réciproque serait en défaut dans le cas où les équations qui expriment $k_1, k_2, \ldots k_m$, en fonction de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$, ne sont pas indépendantes les unes des autres, hypothèse que nous excluons, en supposant que $k_1, k_2, \ldots k_m$ sont m intégrales distinctes.

115. Les formules que nous venons de trouver conduisent aux conséquences suivantes :

1° Si f est une fonction donnée de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$, la détermination d'une autre fonction g, telle que l'on ait $(f, g) = 0$, dépend de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre (*).

(*) Nous reviendrons plus loin sur cette propriété.

2° Il est impossible que l'on ait $(k_i, k_j) = 0$, pour toutes les combinaisons binaires de $k_1, k_2, \ldots k_m$, à moins que l'on n'ait $(\alpha_i, \alpha_j) = 0$, pour toutes les combinaisons binaires de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$.

116. Comme exemple de la première de ces conséquences, considérons un cas qui se présente dans beaucoup de questions de dynamique.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ trois intégrales telles que l'on ait :

$$(\alpha_2, \alpha_3) = \alpha_1, \quad (\alpha_3, \alpha_1) = \alpha_2, \quad (\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_3,$$

et soit proposé de trouver une fonction g de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, telle que l'on ait :

$$(\alpha_1, g) = 0.$$

En faisant $f = \alpha_1$, dans la formule (3), il vient, en ayant égard aux formules précédentes :

$$(\alpha_1, g) = \frac{\partial(\alpha_1, g)}{\partial(\alpha_1, \alpha_2)}\alpha_3 + \frac{\partial(\alpha_1, g)}{\partial(\alpha_2, \alpha_3)}\alpha_1 + \frac{\partial(\alpha_1, g)}{\partial(\alpha_3, \alpha_1)}\alpha_2 = \alpha_3\frac{\partial g}{\partial \alpha_2} - \alpha_2\frac{\partial g}{\partial \alpha_3}.$$

Par conséquent, la condition $(\alpha_1, g) = 0$ nous donne l'équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre :

$$\alpha_3\frac{\partial g}{\partial \alpha_2} - \alpha_2\frac{\partial g}{\partial \alpha_3} = 0,$$

de laquelle on tire :

$$g = \psi(\alpha_2^2 + \alpha_3^2),$$

ψ étant une fonction arbitraire qui peut aussi contenir α_1 d'une manière arbitraire.

117. *Remarque.* — Il est facile de voir que si l'on pose :

$$f = \varphi(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2),$$

on aura identiquement :

$$(f, g) = 0,$$

quelle que soit la fonction g de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

On a, en effet,

$$(f, g) = \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}\frac{\partial g}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial f}{\partial \alpha_2}\frac{\partial g}{\partial \alpha_1}\right)\alpha_3$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_2}\frac{\partial g}{\partial \alpha_3} - \frac{\partial f}{\partial \alpha_3}\frac{\partial g}{\partial \alpha_2}\right)\alpha_1$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_3}\frac{\partial g}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial f}{\partial \alpha_1}\frac{\partial g}{\partial \alpha_3}\right)\alpha_2.$$

Or,

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_1} = 2\alpha_1 . \varphi', \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} = 2\alpha_2 . \varphi', \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_3} = 2\alpha_3 . \varphi';$$

par conséquent, tous les termes du second membre se détruisent deux à deux, et l'on a :

$$(f, g) = 0,$$

quelle que soit la fonction arbitraire g de α_1, α_2, α_3.

118. *Cas particulier.* — Si les constantes α_1, α_2, ... sont des éléments normaux, nous aurons, en les désignant par a_1, a_2, ... a_n, b_1, b_2, ... b_n :

$$(f, g) = -\sum \frac{\partial(f, g)}{\partial(a_i, b_i)},$$

f, g désignant deux fonctions quelconques des éléments normaux, ou deux intégrales quelconques (n° **99**).

Si, dans cette dernière formule, on fait $f = a_i$, on trouve :

$$(a_i, g) = -\frac{\partial g}{\partial b_i};$$

si l'on suppose $f = b_i$, il vient :

$$(b_i, g) = \frac{\partial g}{\partial a_i}.$$

119. *Remarque I.* — Dans le cas où l'intégrale des forces vives existe, nous pouvons supposer que la constante des forces vives h est un des éléments. On sait que l'élément conjugué à h est τ (n° **108**), et que t n'entre explicitement dans aucune

des intégrales, excepté une seule, c'est l'intégrale conjuguée à h, qui est :

$$\tau = -t + \frac{\partial V}{\partial h}.$$

Si donc g est une intégrale quelconque ne renfermant pas t explicitement, elle ne peut pas contenir τ, puisque toute combinaison des intégrales normales qui renfermerait la constante τ, devrait la renfermer sous la forme $t + \tau$.

Or, pour chaque intégrale de cette espèce, nous aurons, en vertu de la formule $(a_i, g) = -\frac{\partial g}{\partial b_i}$,

$$(h, g) = -\frac{\partial g}{\partial \tau}.$$

Mais, g ne contenant pas τ explicitement, on a :

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} = 0,$$

par conséquent,

$$(h, g) = 0.$$

Si, au contraire, g renferme explicitement le temps, elle le contient sous la forme $t + \tau$, et l'on a :

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} = 1,$$

et, par suite,

$$(h, g) = -1.$$

120. *Remarque II.* — Il est facile de conclure du théorème de Poisson que, si l'*intégrale des aires a lieu par rapport à deux des plans coordonnés, elle a aussi lieu par rapport au troisième plan.*

En effet, en posant :

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dz}{dt} = z',$$

on a pour deux de ces intégrales :

$$\int (xy' - yx')\,dm = \alpha,$$

$$\int (yz' - zy')\,dm = \beta.$$

Or, l'équation :

$$(\alpha, \beta) = const.,$$

nous donne :

$$\int (zx' - xz')\,dm = const.,$$

ce qui est la troisième intégrale des aires.

XX.

Théorèmes de M. Bertrand.

121. Poisson n'avait tiré aucune conséquence de son théorème. C'est Jacobi qui, trente ans après la découverte de Poisson, a le premier signalé l'utilité de ce théorème qu'il considère comme le plus important du calcul intégral (*). « Cependant, » dit-il, on le croirait complètement inconnu; car, on ne le » trouve dans aucun Traité de mécanique, ni dans aucun » ouvrage sur l'intégration des équations différentielles. » Jacobi n'hésite pas à en conclure que probablement personne, ni Lagrange, ni Poisson lui-même, n'en a soupçonné l'importance.

Le théorème de Poisson conduisit Jacobi au théorème suivant :

Théorème de Jacobi. — *Dans tout problème de mécanique auquel s'applique le principe des forces vives, si l'on connaît deux intégrales autres que celle des forces vives, on pourra trouver toutes les intégrales restantes, sans aucune nouvelle intégration.*

Nous avons démontré le théorème de Poisson étendu au cas

(*) Jacobi, *Nova methodus* (Journal de Crelle, t. LX, pp. 45 et 46); *Comptes rendus*, Paris, 1840; *Journal de Liouville*, t. V, p. 350.

général des équations canoniques, en supposant que H est une fonction de t, $q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n$.

Il est facile d'en déduire le théorème de Jacobi.

En effet, puisque, en vertu du théorème de Poisson, (α, β) est constante pendant toute la durée du mouvement, il en résulte que cette quantité égalée à une constante arbitraire est une troisième intégrale du système proposé.

Il paraîtrait donc, et c'est en cela que consiste le théorème de Jacobi (*), qu'il suffit de connaître deux intégrales d'un problème de mécanique, ou, en général, d'un système canonique, pour avoir la solution complète par une série de différentiations seulement.

En effet, (α, β) étant une fonction de $q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n, t$, si on l'égale à une constante arbitraire, l'équation :

$$(\alpha, \beta) = \gamma,$$

sera une intégrale du système.

En appliquant de nouveau le théorème, nous aurons une nouvelle intégrale :

$$(\alpha, \gamma) = \delta,$$

et ainsi de suite.

122. Mais l'examen approfondi de cette question a montré à M. Bertrand (**) que la méthode d'intégration fondée sur le théorème de Poisson est loin d'avoir l'importance que Jacobi lui avait attribuée d'abord. *Les cas où ce théorème conduit à une nouvelle intégrale sont plus rares que ceux où il n'atteint pas ce but.*

Quelquefois aucune des combinaisons deux à deux par le théorème de Poisson, des intégrales qui forment la solution complète, ne donne une intégrale nouvelle; dans d'autres cas, une partie de ces intégrales combinées deux à deux ne donne

(*) *Nova methodus*, p. 43.

(**) *Journal de Liouville*, t. XVII; Imschenetsky, p. 182.

pas d'intégrale nouvelle. M. Bertrand, profitant des cas d'exception, a imaginé une méthode spéciale d'intégration des équations canoniques. Il a reconnu que, dans ces cas d'exception, il est souvent possible de trouver un nombre plus ou moins grand d'intégrales nouvelles au moyen des intégrales déjà connues. Si l'on parvient ainsi à connaître la moitié des intégrales, on peut, comme nous l'avons vu (n° **104**), en appliquant le théorème de M. Liouville, compléter la solution du problème au moyen d'une fonction V qui donnera toutes les autres intégrales.

123. Comme nous l'avons vu (n° **112**), les deux intégrales données :

$$\alpha = const., \quad \beta = const.,$$

ne conduisent pas à une nouvelle intégrale par l'application du théorème de Poisson :

1° Lorsque l'expression (α, β) se réduit identiquement à une constante numérique quelconque, laquelle peut être nulle;

2° Lorsque l'expression (α, β) se réduit à une fonction de α et de β, en sorte que l'expression :

$$(\alpha, \beta) = const.,$$

est une combinaison algébrique des intégrales α et β.

124. Ainsi, par exemple, si dans les équations canoniques la fonction H ne renferme pas explicitement le temps t, on sait (n° **17**) que l'équation :

$$H = const.,$$

est une intégrale de ces équations.

Il est facile de voir que, si l'on prend cette intégrale pour l'intégrale α, toute autre intégrale, combinée avec elle par la formule de Poisson, donnera un résultat illusoire.

En effet, soit d'abord :

$$\beta = \varphi(q_1, \ldots q_n, p_1, \ldots p_n),$$

une autre intégrale *quelconque* ne renfermant pas explicitement le temps.

En écrivant que β est une intégrale des équations canoniques, c'est-à-dire que l'on a :

$$\frac{d\beta}{dt} = 0,$$

en vertu des équations canoniques, il vient :

$$\sum \left(\frac{\partial \beta}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial \beta}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) = 0,$$

ou bien :

$$\sum \left(\frac{\partial \beta}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \beta}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0;$$

or, cette équation n'est autre que :

$$(\beta, H) = 0.$$

Si l'intégrale β renferme explicitement le temps, et si l'on a :

$$\beta = t + \psi(q_1, \ldots q_n, p_1, \ldots p_n),$$

la fonction ψ ne renfermant pas explicitement le temps, nous aurons :

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial \beta}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial \beta}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial \beta}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial t} \right).$$

Or, si nous écrivons que β est une intégrale des équations canoniques, c'est-à-dire que l'on a :

$$\frac{d\beta}{dt} = 0,$$

en vertu des équations canoniques, il vient, en observant que :

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = 1,$$

l'équation :

$$1 + \sum \left(\frac{\partial \beta}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \beta}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0,$$

ou bien :

$$1 + (\beta, H) = 0,$$

d'où :

$$(\beta, H) = -1.$$

Ainsi donc, dans le cas où H ne renferme pas explicitement le temps t, il est impossible de former une nouvelle intégrale par la formule de Poisson appliquée à deux intégrales dont l'une serait $H = const.$

C'est ce qui arrivera, en particulier, lorsque l'une des deux intégrales α, β sera l'*intégrale des forces vives*. Nous aurons le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Toute intégrale combinée avec celle des forces vives donne à l'équation de Poisson une forme illusoire.*

125. Le théorème de Poisson peut, comme nous venons de le dire, conduire de deux manières différentes à un résultat illusoire. Il peut arriver : ou bien que l'équation de Poisson se réduise à une identité, telle que $0 = 0$, ou $1 = 1$, ou bien qu'elle donne une intégrale qui soit une combinaison de celles dont on l'a déduite.

M. Bertrand a démontré (*) que ces deux cas se rattachent l'un à l'autre; il en conclut, par conséquent, que, pour les étudier, il suffit de considérer les intégrales qui, combinées avec une intégrale donnée, donnent à l'expression de Poisson une valeur identiquement constante. Il indique ensuite le moyen de trouver l'une de ces intégrales lorsque l'autre est connue, et il prouve qu'il en existe toujours.

126. Voici le théorème qui permet de rattacher l'un à l'autre les deux cas d'exception :

THÉORÈME. — *Si $\alpha = \varphi$, $\beta = \psi$ sont deux intégrales d'un même problème, telles que (α, β) est une fonction de α et de β, il existe toujours une fonction de α et de β, qui, égalée à une constante γ, donnera une intégrale telle que (α, γ) soit identiquement égale à l'unité.*

En effet, on a, par définition :

$$(\alpha, \gamma) = \sum \left(\frac{\partial \alpha}{\partial q_i} \frac{\partial \gamma}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha}{\partial p_i} \frac{\partial \gamma}{\partial q_i} \right);$$

(*) *Journal de Liouville*, t. XVII, p. 393.

or, γ étant une fonction de α et de β, on a :

$$\frac{\partial\gamma}{\partial p_i} = \frac{\partial\gamma}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial p_i} + \frac{\partial\gamma}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial p_i},$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial q_i} = \frac{\partial\gamma}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial q_i} + \frac{\partial\gamma}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial q_i},$$

par suite, en réduisant,

$$(\alpha, \gamma) = (\alpha, \beta)\frac{\partial\gamma}{\partial\beta}.$$

Si donc (α, β) est une fonction de α et de β, on pourra déterminer γ par l'équation différentielle partielle :

$$(\alpha, \beta)\frac{\partial\gamma}{\partial\beta} = 1,$$

laquelle nous donne l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{d\gamma}{1} = \frac{d\beta}{(\alpha, \beta)}.$$

Par conséquent, on peut toujours faire en sorte que :

$$(\alpha, \gamma) = 1.$$

Ce théorème peut être généralisé de la manière suivante :

127. THÉORÈME. — *Si $\alpha = \varphi$, $\beta = \psi$ sont deux intégrales d'un même problème, et si, en les combinant par la formule de Poisson, on trouve une troisième intégrale :*

$$(\alpha, \beta) = \gamma,$$

puis une quatrième :

$$(\alpha, \gamma) = \delta,$$

puis une cinquième :

$$(\alpha, \delta) = \varepsilon,$$

et ainsi de suite; si l'on arrive enfin à une intégrale :

$$(\alpha, \eta) = \zeta,$$

telle que l'on ait :

$$\zeta = F(\alpha, \beta, \gamma, \dots \eta) \text{ (*)},$$

il existe toujours une ou plusieurs intégrales de la forme

$$\xi = f(\alpha, \beta, \gamma, \dots \eta),$$

qui, combinées avec α, *donnent identiquement :*

$$(\alpha, \xi) = 0, \quad \text{ou} \quad (\alpha, \xi) = 1.$$

Pour démontrer ce théorème, considérons l'expression :

$$(\alpha, \xi) = \sum \left(\frac{\partial \alpha}{\partial q_i} \frac{\partial \xi}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha}{\partial p_i} \frac{\partial \xi}{\partial q_i} \right),$$

et remplaçons les dérivées de ξ par leurs valeurs obtenues en considérant ξ comme une fonction composée; nous aurons, après quelques réductions :

$$\begin{aligned} (\alpha, \xi) &= (\alpha, \beta) \frac{\partial \xi}{\partial \beta} + (\alpha, \gamma) \frac{\partial \xi}{\partial \gamma} + \dots + (\alpha, \eta) \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \\ &= \gamma \frac{\partial \xi}{\partial \beta} + \delta \frac{\partial \xi}{\partial \gamma} + \dots + F(\alpha, \beta, \gamma, \dots \eta) \frac{\partial \xi}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

Si maintenant on veut déterminer ξ de manière que l'on ait :

$$(\alpha, \xi) = 0, \quad \text{ou} \quad (\alpha, \xi) = 1,$$

on devra intégrer l'une des deux équations linéaires aux dérivées partielles suivantes :

$$\gamma \frac{\partial \xi}{\partial \beta} + \delta \frac{\partial \xi}{\partial \gamma} + \dots + F(\alpha, \beta, \gamma, \dots \eta) \frac{\partial \xi}{\partial \eta} = 0,$$

ou bien :

$$\gamma \frac{\partial \xi}{\partial \beta} + \delta \frac{\partial \xi}{\partial \gamma} + \dots + F(\alpha, \beta, \gamma, \dots \eta) \frac{\partial \xi}{\partial \eta} = 1,$$

(*) Il est évident que l'on doit arriver à une intégrale ζ jouissant de cette propriété d'être une fonction des précédentes; car, la suite des intégrales distinctes ne peut pas se continuer indéfiniment, puisque le nombre total des intégrales des équations canoniques est limité.

dont les intégrales satisferont à l'une ou à l'autre des conditions précédentes.

Donc, les intégrales des systèmes d'équations simultanées ordinaires :

$$\frac{d\beta}{\gamma}=\frac{d\gamma}{\delta}=\frac{d\delta}{\varepsilon}=\dots=\frac{d\eta}{F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \dots\ \eta)}=\frac{d\xi}{0},$$

$$\frac{d\beta}{\gamma}=\frac{d\gamma}{\delta}=\frac{d\delta}{\varepsilon}=\dots=\frac{d\eta}{F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \dots\ \eta)}=\frac{d\xi}{1},$$

nous donneront les intégrales générales des équations linéaires ci-dessus. Or, si l'équation en ξ renferme k variables indépendantes, son intégrale générale sera une fonction arbitraire de $k-1$ fonctions distinctes, et elle contiendra, par conséquent, $k-1$ intégrales distinctes satisfaisant à la condition énoncée.

On conclut de là le théorème suivant :

128. THÉORÈME. — *Une intégrale étant donnée, il y en a une ou plusieurs autres qui, combinées avec celle-ci, conduisent à des équations identiques.*

Soit :

$$\alpha=\varphi(q_1,\ \dots q_n,\ p_1,\ \dots p_n),$$

une intégrale donnée d'un problème de mécanique.

Si l'on prend une seconde intégrale du même problème :

$$\beta=\psi(q_1,\ \dots q_n,\ p_1,\ \dots p_n),$$

et si on la combine avec α, on formera l'expression $(\alpha,\ \beta)$.

Si cette expression est identiquement constante, le théorème est démontré; sinon l'expression :

$$(\alpha,\ \beta)=\gamma,$$

sera une nouvelle intégrale.

On formera alors l'expression $(\alpha,\ \gamma)$, laquelle sera identiquement constante ou non : si $(\alpha,\ \gamma)$ est constante, la proposition est démontrée, sinon l'on posera $(\alpha,\ \gamma)=\delta$, équation qui sera une nouvelle intégrale, et ainsi de suite.

En continuant ainsi, on arrivera à une fonction ζ qui est :

1° Ou bien une constante, et la proposition est démontrée, puisque la fonction précédente satisfait à la condition énoncée;

2° Ou bien une fonction des précédentes (*) : dans ce cas, comme on sait (nº **127**), en formant une fonction ξ convenable des intégrales successivement obtenues, on aura une intégrale qui, combinée avec α, donnera un résultat identique. On a même vu (nº **127**) que l'on peut obtenir plusieurs intégrales distinctes les unes des autres, telles que l'on ait :

$$(\alpha,\ \xi) = 0, \quad \text{ou} \quad (\alpha,\ \xi) = 1.$$

Nous avons vu (nº **124**) que l'intégrale des forces vives donne toujours un résultat identique, quelle que soit l'intégrale avec laquelle on la combine. Combinée avec une intégrale α ne contenant pas explicitement le temps, elle donne $(\alpha, H) = 0$; et combinée avec une intégrale renfermant explicitement le temps, elle donne $(\alpha, H) = -1$.

On pourrait se demander si l'intégrale ξ dont nous venons de démontrer l'existence, et telle que l'on ait :

$$(\alpha,\ \xi) = 0, \quad \text{ou} \quad (\alpha,\ \xi) = 1,$$

n'est pas ou l'intégrale des forces vives, ou une fonction de cette dernière.

Le théorème suivant prouve que l'intégrale des forces vives n'est pas la seule qui remplisse cette condition, ce qui d'ailleurs est déjà évident, puisqu'il existe un grand nombre de fonctions ξ.

129. Théorème. — *Quelle que soit une intégrale donnée :*

$$\alpha = \varphi(q_1 \dots q_n,\ p_1 \dots p_n),$$

il existe toujours au moins une autre intégrale λ, qui n'est ni l'équation des forces vives, ni une fonction de celle-ci, et qui, combinée avec α, donne un résultat illusoire :

$$(\alpha,\ \lambda) = 0, \quad \text{ou} \quad (\alpha,\ \lambda) = 1.$$

(*) Car les intégrales distinctes sont en nombre limité.

Soit β une intégrale quelconque différente de celle des forces vives :

$$\beta = \varphi(q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n);$$

d'après ce que nous avons vu (n° 127), si, en combinant α avec β, puis avec les intégrales résultantes, on arrive, après k opérations, à une intégrale rentrant dans les précédentes, la fonction qui, combinée avec α, donne un résultat illusoire, est déterminée par une équation aux dérivées partielles à k variables indépendantes. Cette fonction aura, par conséquent, $k-1$ formes différentes.

Pour $k=1$, c'est-à-dire si le cas se présente après une seule opération, l'intégrale sera une combinaison de α et de β; par suite, elle est différente de celle des forces vives.

Pour $k=2$, nous aurons :

$$(\alpha, \beta) = \gamma,$$

$$(\alpha, \gamma) = f(\alpha, \beta, \gamma);$$

or, si l'on cherche par la méthode indiquée ci-dessus (n° 127), une intégrale $\psi(\alpha, \beta, \gamma)$ qui, combinée avec α, donne un résultat identique :

$$(\alpha, \psi) = 1, \quad \text{ou} \quad (\alpha, \psi) = 0,$$

cette intégrale sera ou non celle des forces vives.

Si cette intégrale ψ est précisément l'équation des forces vives, nous aurons :

$$\psi(\alpha, \beta, \gamma) = \mathrm{H},$$

d'où l'on tire :

$$\gamma = \zeta(\alpha, \beta, \mathrm{H}).$$

Considérons maintenant une fonction $\xi(\alpha, \beta, \mathrm{H})$ qui, évidemment, sera une intégrale; nous aurons :

$$(\alpha, \xi) = (\alpha, \beta)\frac{\partial \xi}{\partial \beta} + (\alpha, \mathrm{H})\frac{\partial \xi}{\partial \mathrm{H}} = (\alpha, \beta)\frac{\partial \xi}{\partial \beta} = \zeta(\alpha, \beta, \mathrm{H})\frac{\partial \xi}{\partial \beta} \ (^*).$$

(*) Puisque $(\alpha, \mathrm{H}) = 0$.

Cela posé, si l'on détermine ξ par la condition que l'on ait la relation :

$$\zeta(\alpha, \beta, \mathrm{H}) \frac{\partial \xi}{\partial \beta} = 1,$$

la fonction ξ ainsi déterminée satisfera à la condition proposée :

$$(\alpha, \xi) = 1 ;$$

de plus, elle sera distincte de celle des forces vives qui donnerait :

$$(\alpha, \mathrm{H}) = 0,$$

puisque α ne contient pas explicitement le temps.

Ayant examiné le cas où l'on suppose $k = 2$, supposons qu'en combinant α avec β, puis avec les intégrales γ, δ, ... que l'on obtient successivement, on trouve une intégrale ε pour laquelle on ait :

$$(\alpha. \varepsilon) = 1,$$

cette intégrale ε sera évidemment différente de celle des forces vives, et la proposition sera encore démontrée.

Si, au contraire, on trouve :

$$(\alpha, \varepsilon) = 0,$$

et que ε soit précisément l'intégrale des forces vives, ou une fonction $\Pi(\mathrm{H})$ de cette intégrale, on aura, en désignant par δ l'intégrale qui, dans la série des opérations, précède immédiatement ε,

$$(\alpha, \delta) = \varepsilon = \Pi\,(\mathrm{H}).$$

Or, il est évident que si, au lieu de l'intégrale β, que nous avons prise pour point de départ, on avait pris $\frac{\beta}{\Pi(\mathrm{H})}$, toutes les intégrales successivement obtenues auraient été divisées par $\Pi(\mathrm{H})$, et l'on aura eu :

$$\left(\alpha, \frac{\delta}{\Pi(\mathrm{H})}\right) = 1,$$

de sorte que $\frac{\delta}{\Pi(\mathrm{H})}$ est une intégrale distincte de celle des forces vives, et qui, combinée avec α, donne un résultat identique.

Des théorèmes précédents, M. Bertrand déduit celui-ci :

130. THÉORÈME. — *Quelle que soit une intégrale donnée α, on peut toujours compléter la solution du problème en y adjoignant d'autres intégrales β_1, β_2, ... β_{2n-1}, lesquelles, combinées avec α, donnent à l'équation de Poisson une forme identique :*

$$(\alpha, \beta_1) = 1, \ (\alpha, \beta_2) = 0, \ldots (\alpha, \beta_{2n-1}) = 0.$$

Comme nous l'avons vu par le théorème précédent, quelle que soit l'intégrale α, il existe toujours une fonction β_1, telle que :

$$(\alpha, \beta_1) = 1.$$

Nous devons maintenant démontrer qu'il existe $2n-2$ intégrales distinctes de α et de β_1, qui, combinées avec α, donnent $(\alpha, \beta) = 0$.

Désignons par μ le nombre des intégrales satisfaisant à cette condition, β_2, ... $\beta_{\mu+1}$, et supposons que l'on ait $\mu+1 < 2n-1$. Il existera évidemment alors d'autres intégrales indépendantes de celles-là, ainsi que de α et de β_1.

Si $\beta_{\mu+2}$ est une de ces intégrales, nous aurons :

$$(\alpha, \beta_{\mu+2}) = \beta_{\mu+3},$$

$\beta_{\mu+3}$ étant, par hypothèse, différent de zéro. Je dis que $\beta_{\mu+3}$ sera aussi différent de l'unité; car, sans cela, des équations :

$$(\alpha, \beta_{\mu+2}) = 1, \quad \text{et} \quad (\alpha, \beta_1) = 1,$$

on déduirait évidemment :

$$(\alpha, \beta_{\mu+2} - \beta_1) = 0;$$

d'où il résulterait que $\beta_{\mu+2} - \beta_1$ serait une fonction de β_2, β_3, ... $\beta_{\mu+1}$, et, par suite, que $\beta_{\mu+2}$ ne serait pas une nouvelle intégrale. Par conséquent, $\beta_{\mu+3}$ est différent de l'unité.

Puisque $\beta_{\mu+3}$ est différent de zéro et de l'unité, posons :

$$(\alpha, \beta_{\mu+3}) = \beta_{\mu+4},$$

$$(\alpha, \beta_{\mu+4}) = \beta_{\mu+5}, \text{ etc.}$$

Nous finirons évidemment par trouver une intégrale β qui sera identiquement constante, ou bien une fonction des précédentes.

Soit :

$$\beta_{\mu+i} = F(\alpha, \beta_{\mu+2}, \beta_{\mu+3}, \dots \beta_{\mu+i-1}),$$

cette intégrale.

Cela posé, désignons par γ une fonction des intégrales α, $\beta_{\mu+2}$, $\beta_{\mu+3}$, ... $\beta_{\mu+i-1}$, et posons :

$$\gamma = \varpi(\alpha, \beta_{\mu+2}, \dots \beta_{\mu+i-1});$$

nous aurons :

$$(\alpha, \gamma) = (\alpha, \beta_{\mu+2}) \frac{\partial\varpi}{\partial\beta_{\mu+2}} + (\alpha, \beta_{\mu+3}) \frac{\partial\varpi}{\partial\beta_{\mu+3}} + \dots + (\alpha, \beta_{\mu+i-1}) \frac{\partial\varpi}{\partial\beta_{\mu+i-1}}$$

$$= \beta_{\mu+3} \frac{\partial\varpi}{\partial\beta_{\mu+2}} + \beta_{\mu+4} \frac{\partial\varpi}{\partial\beta_{\mu+3}} + \dots + \beta_{\mu+i} \frac{\partial\varpi}{\partial\beta_{\mu+i-1}},$$

ou bien :

$$(\alpha, \gamma) = \beta_{\mu+3} \frac{\partial\varpi}{\partial\beta_{\mu+2}} + \beta_{\mu+4} \frac{\partial\varpi}{\partial\beta_{\mu+3}} + \dots + F(\alpha, \beta_{\mu+2}, \dots \beta_{\mu+i-1}) \frac{\partial\varpi}{\partial\beta_{\mu+i-1}}.$$

Si l'on pose :

$$(\alpha, \gamma) = 0,$$

on a l'équation différentielle partielle :

$$\beta_{\mu+3} \frac{\partial\varpi}{\partial\beta_{\mu+2}} + \beta_{\mu+4} \frac{\partial\varpi}{\partial\beta_{\mu+3}} + \dots + F(\alpha, \beta_{\mu+2}, \dots \beta_{\mu+i-1}) \frac{\partial\varpi}{\partial\beta_{\mu+i-1}} = 0,$$

qui pourra servir à déterminer la fonction ϖ ou γ en fonction de :

$$\alpha, \beta_{\mu+2}, \beta_{\mu+3}, \dots \beta_{\mu+i-1}.$$

Or, γ sera une intégrale nouvelle; car, sans cela, γ serait une fonction des intégrales primitives α, β_1, ... $\beta_{\mu+1}$, et l'on aurait une relation telle que :

$$\gamma = f(\alpha, \beta_1, \dots \beta_{\mu+1});$$

mais, γ satisfaisant à l'équation :

$$(\alpha, \gamma) = 0,$$

on aurait :

$$(\alpha, f) = 0,$$

et, par conséquent, il existerait une relation entre les intégrales α, β_1, β_2, ... $\beta_{\mu+1}$, ce qui est contraire à l'hypothèse que toutes les intégrales :

$$\alpha, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_{\mu+1},$$

sont différentes entre elles.

Nous avons donc fait une hypothèse impossible en supposant $\mu+1 < 2n-1$. Par conséquent, $\mu+1 = 2n-1$, et le théorème est démontré.

131. Les théories précédentes peuvent donc être résumées de la manière suivante :

Théorème. — *Étant donnée une intégrale α, autre que celle des forces vives, et indépendante du temps, la solution du problème se composera :*

1° *De* 2n — 2 *intégrales comprenant α, qui sont indépendantes du temps, et telles que, combinées avec α, elles donnent :*

$$(\alpha, \lambda) = 0,$$

λ étant l'une quelconque d'entre elles;

2° *D'une autre intégrale μ, également indépendante du temps, et telle que :*

$$(\alpha, \mu) = 1;$$

3° *D'une intégrale ν de la forme :*

$$\nu = \varphi(q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n) - t,$$

telle que :

$$(\alpha, \nu) = 0.$$

132. *Remarque I.* — Si l'on se rappelle la définition que nous avons donnée des intégrales conjuguées (n° **97**), on verra que les deux intégrales α et μ qui nous donnent :

$$(\alpha, \mu) = 1,$$

sont conjuguées.

On verra aussi que l'intégrale ν qui contient le temps, est le conjuguée de l'intégrale des forces vives. En effet, on aura, comme il est facile de s'en assurer :

$$(\nu, H) = 1.$$

133. *Remarque II.* — Pour appliquer la théorie de M. Bertrand, il faut connaître une intégrale α, et alors on a à déterminer $2n - 1$ intégrales satisfaisant à l'équation différentielle partielle linéaire du premier ordre :

$$(\alpha, \lambda) = 0, \quad \text{ou} \quad (\alpha, \lambda) = 1, \tag{A}$$

λ étant la fonction inconnue.

Mais la fonction λ doit aussi satisfaire à l'équation :

$$(\lambda, H) = 0. \tag{B}$$

Si donc on peut intégrer l'équation (B), il suffira de chercher, parmi les solutions de (B), celles qui satisfont à l'équation (A); sinon, on aura à chercher les solutions communes aux équations (A) et (B).

134. Nous avons vu (n° **130**) qu'une intégrale α étant donnée, on peut compléter la solution du problème au moyen des intégrales $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{2n-1}$, qui, combinées avec α, donnent toutes à la formule de Poisson une forme identique.

Il ne faut cependant pas en conclure que toutes les intégrales du problème soient dans le même cas.

Soit, par exemple, l'intégrale la plus générale :

$$\eta = f(\alpha, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{2n-1});$$

nous aurons :

$$\begin{aligned}(\alpha, \eta) &= (\alpha, \beta_1)\frac{\partial \eta}{\partial \beta_1} + (\alpha, \beta_2)\frac{\partial \eta}{\partial \beta_2} + \cdots + (\alpha, \beta_{2n-1})\frac{\partial \eta}{\partial \beta_{2n-1}} \\ &= (\alpha, \beta_1)\frac{\partial \eta}{\partial \beta_1} = \frac{\partial \eta}{\partial \beta_1}.\end{aligned}$$

Par suite, l'expression (α, η) ne sera identiquement constante que si $\frac{\partial \eta}{\partial \beta_1}$ est constant lui-même.

Il en résulte que toutes les intégrales η, en nombre infini, provenant de la combinaison de α, β_2, β_3, ... β_{2n-1}, donneront un résultat identiquement nul, si on les combine avec α. Au contraire, les intégrales qui contiennent β_1 peuvent conduire à des résultats non identiques.

135. Comme application de la méthode de M. Bertrand, nous reprendrons le problème du *mouvement d'un point matériel attiré vers un centre fixe par une force en raison inverse du carré de la distance.*

Les équations du mouvement étant :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dx'}{dt} = -\frac{\mu x}{r^3}, \\ \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dy'}{dt} = -\frac{\mu y}{r^3}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

le principe des aires nous donne l'intégrale :

$$xy' - yx' = const. = \alpha. \tag{2}$$

Cherchons une seconde intégrale :

$$\beta = \psi(x, y, x', y', t), \tag{3}$$

satisfaisant à l'une des conditions :

$$(\beta, \alpha) = 0, \quad \text{ou} \quad (\beta, \alpha) = 1.$$

Nous aurons les deux équations différentielles partielles linéaires :

$$-y'\frac{\partial\beta}{\partial x'} - y\frac{\partial\beta}{\partial x} + x'\frac{\partial\beta}{\partial y'} + x\frac{\partial\beta}{\partial y} = 0, \tag{4}$$

$$-y'\frac{\partial\beta}{\partial x'} - y\frac{\partial\beta}{\partial x} + x'\frac{\partial\beta}{\partial y'} + x\frac{\partial\beta}{\partial y} = 1. \tag{5}$$

Pour intégrer la première, nous devons intégrer le système d'équations simultanées ordinaires :

$$\frac{dx'}{-y'} = \frac{dx}{-y} = \frac{dy'}{x'} = \frac{dy}{x} = \frac{d\beta}{0};$$

on trouve facilement que les quatre intégrales de ce système sont :

$$\beta = a_1, \quad x^2 + y^2 = a_2, \quad x'^2 + y'^2 = a_3, \quad xx' + yy' = a_4,$$

et, par conséquent, l'intégrale la plus générale de l'équation (4) est :

$$\beta = F(x^2 + y^2,\ x'^2 + y'^2,\ xx' + yy'),$$

ou bien, si le temps t doit y figurer :

$$\beta = t + F(x^2 + y^2,\ x'^2 + y'^2,\ xx' + yy').$$

On verra de même que l'intégration de l'équation (5) se ramène à l'intégration du système d'équations différentielles ordinaires :

$$\frac{dx'}{-y'} = \frac{dx}{-y} = \frac{dy'}{x'} = \frac{dy}{x} = \frac{d\beta}{1};$$

on en tire :

$$\frac{dx}{d\beta} = -y, \quad \frac{dy}{d\beta} = x, \quad \frac{dx'}{d\beta} = -y', \quad \frac{dy'}{d\beta} = x',$$

d'où l'on déduit les intégrales :

$$x = A \cos(\beta + k), \qquad y = A \sin(\beta + k),$$
$$x' = A' \cos(\beta + k'), \qquad y' = A' \sin(\beta + k'),$$

A, A', k, k' étant des constantes arbitraires. Ces dernières nous donnent :

$$x^2 + y^2 = b_1, \quad x'^2 + y'^2 = b_2, \quad xx' + yy' = b_3,$$
$$\text{arc tg} \frac{y}{x} - \beta = b_4.$$

L'intégrale la plus générale de l'équation (5) est, par conséquent :

$$\beta = \text{arc tg} \frac{y}{x} + F_1(x^2 + y^2,\ x'^2 + y'^2,\ xx' + yy'),$$

ou bien, si t doit figurer dans l'intégrale,

$$\beta = t + \text{arc tg} \frac{y}{x} + F_1(x^2 + y^2,\ x'^2 + y'^2,\ xx' + yy').$$

Si maintenant nous posons :

$$x^2+y^2=u,\quad x'^2+y'^2=v,\quad xx'+yy'=w,$$

ces deux systèmes d'intégrales pourront s'écrire :

$$\left.\begin{array}{l}\beta=\mathrm{F}(u,\ v,\ w),\\ \beta=t+\mathrm{F}(u,\ v,\ w),\end{array}\right\}\qquad(6)$$

ou bien :

$$\left.\begin{array}{l}\beta=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}+\mathrm{F}_1(u,\ v,\ w),\\[2ex] \beta=t+\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}+\mathrm{F}_1(u,\ v,\ w).\end{array}\right\}\qquad(7)$$

136. Il nous reste maintenant à déterminer quelles sont les intégrales du problème comprises dans les formes (6) et (7). Pour cela, nous devons exprimer que les dérivées totales par rapport à t sont nulles, en vertu des équations du mouvement.

Considérons d'abord la première équation (6) :

$$\beta=\mathrm{F}(u,\ v,\ w).$$

La condition $\frac{d\beta}{dt}=0$, nous donne :

$$\frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\beta}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\beta}{\partial x'}\frac{dx'}{dt}+\frac{\partial\beta}{\partial y'}\frac{dy'}{dt}=0.\qquad(8)$$

Or, on a :

$$\frac{\partial\beta}{\partial x}=\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}=2x\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial u}+x'\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial w},$$

de même :

$$\frac{\partial\beta}{\partial y}=2y\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial u}+y'\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial w},$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial x'}=2x'\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial v}+x\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial w},$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial y'}=2y'\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial v}+y\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial w}.$$

Substituant dans l'équation (8), et ayant égard aux équations (1), il vient :

$$2w\frac{\partial F}{\partial u}-2\frac{\mu w}{r^3}\frac{\partial F}{\partial v}+\left(v-\frac{\mu u}{r^3}\right)\frac{\partial F}{\partial w}=0,$$

ou bien, en remplaçant r par sa valeur en fonction de u :

$$2w\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{2\mu w}{u^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial F}{\partial v}+\left(v-\frac{\mu}{u^{\frac{1}{2}}}\right)\frac{\partial F}{\partial w}=0.$$

Or, l'intégration de cette équation différentielle partielle se ramène à l'intégration du système ordinaire :

$$\frac{du}{2w}=\frac{dv}{-\frac{2\mu w}{u^{\frac{3}{2}}}}=\frac{dw}{v-\frac{\mu}{u^{\frac{1}{2}}}}=\frac{dF}{0};$$

on en déduit les équations suivantes :

$$dF=0,\quad \mu u^{-\frac{3}{2}}du+dv=0,\quad 2wdw=vdu+udv,$$

dont les intégrales sont :

$$F=c,\quad v-2\mu u^{-\frac{1}{2}}=c',\quad uv-w^2=c''.$$

Par suite, la valeur générale de β est :

$$\beta=\varphi\left(v-2\mu u^{-\frac{1}{2}},\quad uv-w^2\right),$$

ou bien :

$$\beta=\varphi\left(x'^2+y'^2-\frac{2\mu}{r},\quad (xy'-yx')^2\right).$$

Cette intégrale n'est autre qu'une combinaison de l'intégrale des forces vives et de l'intégrale des aires; par conséquent, elle ne peut former une nouvelle intégrale du problème.

Si nous prenons maintenant la seconde équation (6) :

$$\beta=t+F(u,\ v,\ w),$$

et si nous exprimons qu'elle est une intégrale, nous trouvons l'équation suivante :

$$1 + 2w\frac{\partial F}{\partial u} - 2\frac{\mu w}{u^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial F}{\partial v} + \left(v - \frac{\mu}{u^{\frac{1}{2}}}\right)\frac{\partial F}{\partial w} = 0.$$

Pour intégrer cette équation, il faut poser :

$$\frac{dF}{-1} = \frac{du}{2w} = \frac{dv}{-\frac{2\mu w}{u^{\frac{3}{2}}}} = \frac{dw}{v - \frac{\mu}{u^{\frac{1}{2}}}};$$

nous concluons de là :

$$dF = -\frac{du}{2w}, \quad v - 2\mu u^{-\frac{1}{2}} = c_1, \quad uv - w^2 = c_2,$$

d'où l'on tire :

$$dF = \frac{-du}{2\sqrt{-c_2 + u\left(c_1 + 2\mu u^{-\frac{1}{2}}\right)}},$$

et, en intégrant,

$$F = -\int \frac{du}{2\sqrt{-c_2 + u\left(c_1 + 2\mu u^{-\frac{1}{2}}\right)}} + c_3.$$

Par suite, la valeur générale de β est :

$$\beta = t - \int \frac{du}{2\sqrt{-c_2 + u\left(c_1 + 2\mu u^{-\frac{1}{2}}\right)}} + \varphi\left(v - 2\mu u^{-\frac{1}{2}},\ uv - w^2\right).$$

En égalant la fonction arbitraire φ à zéro, et remplaçant u par r^2, on trouve :

$$\beta = t - \int \frac{dr}{\sqrt{-\frac{c_2}{r^2} + \frac{2\mu}{r} + c_1}}; \qquad (9)$$

c'est l'*équation qui détermine le temps en fonction du rayon vecteur.*

Cherchons maintenant si le problème admet des intégrales de la forme :

$$\beta = \text{arc tg}\,\frac{y}{x} + F_1(u,\ v,\ w).$$

La condition $\frac{d\beta}{dt} = 0$, nous donne :

$$\frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\beta}{\partial x'}\frac{dx'}{dt} + \frac{\partial\beta}{\partial y'}\frac{dy'}{dt} = 0.$$

Or, on a :

$$\frac{\partial\beta}{\partial x} = -\frac{y}{u} + 2x\frac{\partial F_1}{\partial u} + x'\frac{\partial F_1}{\partial w},$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial y} = \frac{x}{u} + 2y\frac{\partial F_1}{\partial u} + y'\frac{\partial F_1}{\partial w},$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial x'} = 2x'\frac{\partial F_1}{\partial v} + x\frac{\partial F_1}{\partial w},$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial y'} = 2y'\frac{\partial F_1}{\partial v} + y\frac{\partial F_1}{\partial w}.$$

Par suite, en substituant, et ayant égard aux équations (1) :

$$\frac{xy' - yx'}{u} + 2w\frac{\partial F_1}{\partial u} - \frac{2\mu}{r^3}(xx' + yy')\frac{\partial F_1}{\partial v} + \left(x'^2 + y'^2 - \frac{\mu}{r}\right)\frac{\partial F_1}{\partial w} = 0,$$

ou bien, en introduisant les quantités u, v, w :

$$\frac{\sqrt{uv - w^2}}{u} + 2w\frac{\partial F_1}{\partial u} - \frac{2\mu w}{u^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial F_1}{\partial v} + \left(v - \frac{\mu}{u^{\frac{1}{2}}}\right)\frac{\partial F_1}{\partial w} = 0.$$

La fonction F_1 est donc déterminée par l'intégration du système ordinaire suivant :

$$\frac{dF_1}{-\frac{\sqrt{uv - w^2}}{u}} = \frac{du}{2w} = \frac{dv}{-\frac{2\mu w}{u^{\frac{3}{2}}}} = \frac{dw}{v - \frac{\mu}{u^{\frac{1}{2}}}};$$

on en tire :

$$v - 2\mu u^{-\frac{1}{2}} = c_1, \quad uv - w^2 = c_2,$$

$$\frac{du}{2w} = -\frac{udF_1}{\sqrt{uv - w^2}}.$$

On a donc :

$$dF_1 = -\frac{\sqrt{uv - w^2}}{2uw}\, du,$$

ou bien :

$$dF_1 = -\frac{\sqrt{c_2}du}{2u\sqrt{c_1 u + 2\mu u^{\frac{1}{2}} - c_2}}.$$

Par suite,

$$\beta = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} - \int \frac{\sqrt{c_2}du}{2u\sqrt{c_1 u + 2\mu u^{\frac{1}{2}} - c_2}} + \varphi_1\left(v - 2\mu u^{-\frac{1}{2}}, uv - w^2\right).$$

En égalant à zéro la fonction arbitraire φ_1, et remplaçant u par r^2, il vient :

$$\beta = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} - \int \frac{\sqrt{c_2}dr}{r^2\sqrt{c_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{c_2}{r^2}}}; \qquad (10)$$

c'est précisément l'*équation de la trajectoire.*

Il est facile de voir que la quatrième intégrale (7) :

$$\beta = t + \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + F_1(u, v, w),$$

n'est autre qu'une combinaison des intégrales (9) et (10), et, par conséquent, elle ne fournit pas une nouvelle solution du problème.

Les intégrales (9) et (10), jointes à celle des aires et à celle des forces vives donnent la solution complète du problème.

127. La marche que nous avons suivie est la suivante :

Après avoir trouvé une intégrale autre que celle des forces

vives, nous en obtenons une troisième, *qui contient le temps*, par la condition que, combinée avec la première, elle donne à l'équation de Poisson la forme $0 = 0$; puis, nous trouvons une quatrième intégrale, ne renfermant pas explicitement le temps, et qui complète la solution, en exprimant que l'équation de Poisson se réduit à $1 = 1$.

Il est facile de démontrer que cette marche sera toujours la même, lorsqu'il s'agira du mouvement d'un point dans un plan, ou, plus généralement, toutes les fois que les coordonnées des points du système peuvent être exprimées en fonction de deux variables indépendantes. Nous allons donc démontrer que, dans le cas d'un tel problème, connaissant l'intégrale des forces vives et une intégrale α, il sera impossible d'en trouver une autre β, distincte des deux premières, ne renfermant pas explicitement le temps, et telle que l'on ait $(\alpha, \beta) = 0$; mais, il y en a une autre telle que l'on ait $(\alpha, \beta) = 1$. Au contraire, on peut toujours trouver une intégrale renfermant explicitement le temps, et telle que l'on ait $(\alpha, \beta) = 0$.

Soient, en effet,

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \\ \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2}, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

les équations différentielles du mouvement.

Soient $H = h$, l'intégrale des forces vives, et :

$$\varphi(q_1, q_2, p_1, p_2) = \alpha,$$

une deuxième intégrale. Cherchons s'il existe une troisième intégrale :

$$\psi(q_1, q_2, p_1, p_2) = \beta,$$

qui, combinée avec la seconde $\varphi = \alpha$, donne à l'équation de Poisson la forme $0 = 0$.

En écrivant que la condition $(\alpha, \beta) = 0$ est satisfaite, on a :

$$\frac{\partial\alpha}{\partial q_1}\frac{\partial\beta}{\partial p_1} - \frac{\partial\alpha}{\partial p_1}\frac{\partial\beta}{\partial q_1} + \frac{\partial\alpha}{\partial q_2}\frac{\partial\beta}{\partial p_2} - \frac{\partial\alpha}{\partial p_2}\frac{\partial\beta}{\partial q_2} = 0; \qquad (12)$$

en outre, si β est une intégrale des équations (11), il vient, en supposant qu'elle ne contienne pas le temps :

$$\frac{\partial H}{\partial q_1}\frac{\partial\beta}{\partial p_1} - \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial\beta}{\partial q_1} + \frac{\partial H}{\partial q_2}\frac{\partial\beta}{\partial p_2} - \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial\beta}{\partial q_2} = 0; \qquad (13)$$

enfin, l'identité $(\beta, \beta) = 0$, nous donne :

$$\frac{\partial\beta}{\partial q_1}\frac{\partial\beta}{\partial p_1} - \frac{\partial\beta}{\partial p_1}\frac{\partial\beta}{\partial q_1} + \frac{\partial\beta}{\partial q_2}\frac{\partial\beta}{\partial p_2} - \frac{\partial\beta}{\partial p_2}\frac{\partial\beta}{\partial q_2} = 0. \qquad (14)$$

Si l'on considère les quantités $\frac{\partial\beta}{\partial p_1}, \frac{\partial\beta}{\partial q_1}, \frac{\partial\beta}{\partial p_2}, \frac{\partial\beta}{\partial q_2}$, comme des inconnues, les équations (12), (13) et (14) seront des équations du premier degré par rapport à ces inconnues, pourvu que, dans l'équation (14), on regarde les coefficients comme égaux aux inconnues elles-mêmes. Ces équations feront connaître les rapports :

$$\frac{\partial\beta}{\partial p_1} : \frac{\partial\beta}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial\beta}{\partial p_2} : \frac{\partial\beta}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial\beta}{\partial q_2} : \frac{\partial\beta}{\partial q_1}.$$

Or, ces équations seront aussi vérifiées, si l'on remplace les dérivées $\frac{\partial\beta}{\partial p_1}, \frac{\partial\beta}{\partial p_2}, \frac{\partial\beta}{\partial q_1}, \frac{\partial\beta}{\partial q_2}$, par les dérivées $\frac{\partial\alpha}{\partial p_1}, \frac{\partial\alpha}{\partial p_2}, \frac{\partial\alpha}{\partial q_1}, \frac{\partial\alpha}{\partial q_2}$ (*). Il est, en effet, facile de voir que, par cette transformation, la première équation devient identique, la deuxième exprimera que α est une intégrale des équations (11), cette intégrale ne renfermant pas le temps, et la troisième devient la première (12).

Il résulte de là que les nouvelles quantités ont les mêmes rapports que les premières; par suite, on a :

$$\frac{\frac{\partial\beta}{\partial p_1}}{\frac{\partial\alpha}{\partial p_1}} = \frac{\frac{\partial\beta}{\partial p_2}}{\frac{\partial\alpha}{\partial p_2}} = \frac{\frac{\partial\beta}{\partial q_1}}{\frac{\partial\alpha}{\partial q_1}} = \frac{\frac{\partial\beta}{\partial q_2}}{\frac{\partial\alpha}{\partial q_2}}.$$

(*) Bien entendu, la substitution ne doit pas être faite dans les coefficients de l'équation (14).

De cette suite de rapports égaux on conclut que β doit être une fonction de α, et, par conséquent, l'équation :

$$\beta = const.,$$

supposée indépendante du temps, ne sera pas une intégrale nouvelle.

128. Le raisonnement que nous venons de faire serait en défaut, si l'une des équations (12), (13) et (14) rentrait dans les autres, c'est-à-dire si ces trois équations se réduisaient à deux. Or, on aurait alors, d'après la théorie des équations du premier degré, des relations de la forme suivante (*) :

$$\frac{\partial\beta}{\partial q_1} = M\frac{\partial\alpha}{\partial q_1} + N\frac{\partial H}{\partial q_1},$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial p_1} = M\frac{\partial\alpha}{\partial p_1} + N\frac{\partial H}{\partial p_1},$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial q_2} = M\frac{\partial\alpha}{\partial q_2} + N\frac{\partial H}{\partial q_2},$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial p_2} = M\frac{\partial\alpha}{\partial p_2} + N\frac{\partial H}{\partial p_2},$$

M et N étant des fonctions quelconques de p_1, p_2, q_1, q_2.

Or, de ces équations on tire, en les multipliant par dq_1, dp_1, dq_2, dp_2 et ajoutant :

$$d\beta = Md\alpha + NdH.$$

Par conséquent, β doit être une fonction de α et de H, c'est-à-dire que cette intégrale β doit encore rentrer dans celles que l'on avait déjà.

129. Cela posé, observons que le problème ne comporte que

(*) On obtient ces équations, en multipliant les équations (12), (13) et (14) respectivement par M, N, — 1, et ajoutant. Si les trois équations se réduisent à deux, l'équation résultante devra être une identité, et les coefficients devront être nuls séparément.

quatre intégrales distinctes : une qui renferme explicitement le temps, et trois qui ne le renferment pas explicitement. Il y a donc *trois intégrales distinctes,* et pas davantage, *qui sont indépendantes du temps.* Or, de ce que nous venons de voir, il résulte que, *parmi ces trois intégrales distinctes, il y en a nécessairement qui ne donnent pas* (*) *à l'équation de Poisson la forme identique* $0 = 0$. Mais nous allons voir qu'*il y en a nécessairement une qui donne à l'équation de Poisson la forme* $1 = 1$.

Soit donc γ une des intégrales qui ne donne pas :

$$(\alpha, \gamma) = 0,$$

et soit :

$$(\alpha, \gamma) = \delta,$$

δ étant une constante numérique ou non.

Si δ est une constante numérique, nous pourrons multiplier ou diviser γ par une constante, de façon que l'on ait $\delta = 1$, et il est ainsi prouvé qu'il existe une intégrale qui, combinée avec α, donne à l'équation de Poisson la forme $1 = 1$.

Si δ n'est pas une constante numérique, l'équation :

$$\delta = const.,$$

est une intégrale indépendante du temps. Cette intégrale est évidemment une fonction des trois intégrales précédentes : en effet, puisqu'il y a seulement trois intégrales distinctes, qui ne renferment pas explicitement le temps, toute intégrale nouvelle ne contenant pas t, sera une fonction des trois autres. Nous aurons donc :

$$(\alpha, \gamma) = \varpi(\alpha, \gamma, h).$$

Ceci établi, posons :

$$\zeta = f(\alpha, \gamma, h),$$

ζ sera une intégrale des équations proposées.

(*) Puisque, connaissant l'intégrale des forces vives et une autre α, il n'y en a plus d'autre indépendante du temps qui donne $(\alpha, \beta) = 0$.

Or, on a :

$$(\alpha, \zeta) = (\alpha, \gamma)\frac{\partial f}{\partial \gamma} + (\alpha, h)\frac{\partial f}{\partial h},$$

et, comme $(\alpha, h) = 0$, il vient :

$$(\alpha, \zeta) = (\alpha, \gamma)\frac{\partial f}{\partial \gamma} = \varpi(\alpha, \gamma, h)\frac{\partial f}{\partial \gamma}.$$

Si donc nous posons :

$$\varpi(\alpha, \gamma, h)\frac{\partial f}{\partial \gamma} = 1,$$

cette équation nous permettra de déterminer la forme de la fonction ζ qui, combinée avec l'intégrale α, donne à l'équation de Poisson la forme identique $1 = 1$, et la proposition est démontrée.

140. Il nous reste à prouver maintenant qu'il existe une intégrale de la forme :

$$\eta = t + F(q_1, q_2, p_1, p_2),$$

qui, combinée avec α, donne à l'équation de Poisson la forme $0 = 0$, c'est-à-dire telle que l'on ait :

$$(\alpha, \eta) = 0.$$

A cet effet, considérons l'une quelconque des intégrales dans lesquelles figure le temps, par exemple :

$$\varepsilon = t + F(q_1, q_2, p_1, p_2),$$

et combinons cette intégrale ε avec α. Nous aurons l'expression (α, ε), qui ne renfermera pas le temps.

Or, cette expression (α, ε) sera zéro, et le théorème sera démontré, ou une constante numérique, ou une intégrale nouvelle.

Dans ces deux derniers cas, nous pouvons poser :

$$(\alpha, \varepsilon) = \Pi(\alpha, \beta, h);$$

car, toute intégrale indépendante du temps [c'est le cas pour (α, ε)],

peut être considérée comme une combinaison des trois intégrales α, β, h.

Dans le cas où (α, ε) est une constante numérique, la fonction Π se réduira à une constante.

Cela posé, nous pouvons ajouter au second membre de l'intégrale ε une fonction quelconque de (α, β, h), et nous formons ainsi une intégrale nouvelle :

$$\varepsilon_1 = t + F(q_1, q_2, p_1, p_2) + f(\alpha, \beta, h) = \varepsilon + f(\alpha, \beta, h).$$

Nous aurons évidemment :

$$(\alpha, \varepsilon_1) = (\alpha, \varepsilon) + \big(\alpha, f(\alpha, \beta, h)\big).$$

Or, on a :

$$(\alpha, f) = (\alpha, \alpha)\frac{\partial f}{\partial \alpha} + (\alpha, \beta)\frac{\partial f}{\partial \beta} + (\alpha, h)\frac{\partial f}{\partial h} = (\alpha, \beta)\frac{\partial f}{\partial \beta};$$

par conséquent,

$$(\alpha, \varepsilon_1) = (\alpha, \varepsilon) + (\alpha, \beta)\frac{\partial f}{\partial \beta},$$

et, comme $(\alpha, \beta) = 1$, il vient :

$$(\alpha, \varepsilon_1) = (\alpha, \varepsilon) + \frac{\partial f}{\partial \beta}.$$

Or, si l'on détermine la fonction f par la condition que l'on ait :

$$(\alpha, \varepsilon) + \frac{\partial f}{\partial \beta} = 0,$$

on aura :

$$(\alpha, \varepsilon_1) = 0.$$

De l'équation :

$$(\alpha, \varepsilon) + \frac{\partial f}{\partial \beta} = 0,$$

on tire :

$$\frac{df}{-(\alpha, \varepsilon)} = \frac{d\beta}{1},$$

d'où :

$$df = -(\alpha, \varepsilon)\, d\beta = -\Pi(\alpha, \beta, h)\, d\beta;$$

on aura donc l'expression de f en fonction de α, β, h, par une quadrature.

En adoptant cette expression de f, l'intégrale ε_1, combinée avec α, donne à l'expression de Poisson la forme identique $0=0$.

141. Il est facile de voir qu'il n'existe pas d'intégrale nouvelle, contenant explicitement le temps, qui donne à l'expression de Poisson la forme $1=1$.

En effet, l'équation :

$$(\alpha, \varepsilon_1) = (\alpha, \varepsilon) + \frac{\partial f}{\partial \beta},$$

nous donne, en faisant $(\alpha, \varepsilon_1) = 1$, l'équation :

$$\Pi(\alpha, \beta, h) + \frac{\partial f}{\partial \beta} = 1,$$

d'où l'on tire l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{d\beta}{1} = \frac{df}{1 - \Pi(\alpha, \beta, h)},$$

et, en intégrant,

$$f = \beta - \int \Pi(\alpha, \beta, h)\, d\beta.$$

On voit donc que l'intégrale qui, combinée avec α, donnerait à l'équation de Poisson la forme $1=1$, est une combinaison des intégrales précédentes : elle est une combinaison de la précédente avec β.

XXI.

Travaux de Bour.

142. Avant d'exposer les travaux de Bour, rappelons le théorème de M. Bertrand (n° **131**) duquel il résulte que la solution complète d'un problème de mécanique peut être formée de $2n$ intégrales du genre suivant :

1° L'intégrale des forces vives $\alpha = H$;

2° Une intégrale qui contient le temps $\beta = G - t$;

3° $2n-2$ autres intégrales, indépendantes du temps, α_1,

$\alpha_2, \ldots \alpha_{2n-2}, \alpha_i$ étant une intégrale quelconque indépendante du temps, et autre que celle des forces vives.

Ces diverses intégrales doivent donner, d'après le théorème de M. Bertrand :

$$(\alpha_1, \alpha_2) = 1, \quad (\alpha_1, G) = 0, \quad (\alpha_1, \alpha_i) = 0,$$

la dernière équation pour toutes les valeurs de i égales à 3, 4, ... $2n - 2$, c'est-à-dire pour i différent de 2.

D'après ce que nous savons, les intégrales $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n-2}$, doivent satisfaire à l'équation aux dérivées partielles :

$$\sum_1^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial \zeta}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial \zeta}{\partial q_i}\right) = 0, \qquad (1)$$

ou bien :

$$(H, \zeta) = 0,$$

laquelle est aussi vérifiée par $\zeta = H$, et dont la solution la plus générale est donc :

$$\zeta = f(H, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n-2}).$$

Au contraire, pour $\zeta = G$, le premier membre de l'équation (1) se réduit à l'unité, c'est-à-dire que l'on a :

$$(H, G) = 1.$$

Il est évident, d'après ce que nous venons de voir, que l'équation aux dérivées partielles (1), qui est linéaire, peut remplacer les équations canoniques.

Les travaux de Bour (*) consistent à montrer comment *on peut abaisser l'ordre de cette équation :*

$$(H, \zeta) = 0, \qquad (1)$$

quand on en connaît une ou plusieurs intégrales.

143. Examinons d'abord le cas ou l'on ne connaît que l'intégrale des forces vives :

$$H = h.$$

(*) *Mémoires des Savants étrangers*, t. XIV.

On se servira de cette intégrale pour éliminer l'une des inconnues, par exemple p_n, qui sera exprimée en fonction de H, $q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_{n-1}$; il s'ensuit qu'une fonction quelconque de $q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n$, deviendra une fonction de H, $q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_{n-1}$. C'est ce qui arrivera pour la fonction ζ.

Or, si nous distinguons par un accent les dérivées prises dans la nouvelle hypothèse, nous aurons :

$$\frac{\partial'\zeta}{\partial p_i} = \frac{\partial\zeta}{\partial p_i} + \frac{\partial\zeta}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial p_i},$$

$$\frac{\partial'\zeta}{\partial q_i} = \frac{\partial\zeta}{\partial q_i} + \frac{\partial\zeta}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial q_i}.$$

D'autre part, si nous remplaçons dans l'équation :

$$H = h,$$

p_n par sa valeur, cette équation devient une identité; par conséquent, on a :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial p_i} = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial q_i} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Donc,

$$\frac{\partial\zeta}{\partial p_i} = \frac{\partial'\zeta}{\partial p_i} - \frac{\partial\zeta}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial q_i} = \frac{\partial'\zeta}{\partial p_i} + \frac{\partial\zeta}{\partial p_n}\frac{\frac{\partial H}{\partial p_i}}{\frac{\partial H}{\partial p_n}},$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial q_i} = \frac{\partial'\zeta}{\partial q_i} - \frac{\partial\zeta}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial q_i} = \frac{\partial'\zeta}{\partial q_i} + \frac{\partial\zeta}{\partial p_n}\frac{\frac{\partial H}{\partial q_i}}{\frac{\partial H}{\partial p_n}}.$$

Remplaçant dans l'équation (1), il est facile de voir que les termes qui renferment $\frac{\partial\zeta}{\partial p_n}$ se détruisent deux à deux, et il reste :

$$\frac{\partial H}{\partial q_1}\frac{\partial'\zeta}{p_1} - \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial'\zeta}{\partial q_1} + \dots + \frac{\partial H}{\partial q_n}\frac{\partial'\zeta}{\partial p_n} - \frac{\partial H}{\partial p_n}\frac{\partial'\zeta}{\partial q_n} = 0.$$

Si nous divisons les deux membres par $-\frac{\partial H}{\partial p_n}$, et si nous observons que $\frac{\partial'\zeta}{\partial p_n}$ est nulle, puisque les dérivées affectées d'un accent se rapportent à l'expression de ζ ne renfermant plus p_n, il vient, en vertu des équations (2) :

$$\frac{\partial p_n}{\partial q_1}\frac{\partial'\zeta}{\partial p_1}-\frac{\partial p_n}{\partial p_1}\frac{\partial'\zeta}{\partial q_1}+\cdots-\frac{\partial p_n}{\partial p_{n-1}}\frac{\partial'\zeta}{\partial q_{n-1}}+\frac{\partial'\zeta}{\partial q_n}=0;$$

c'est-à-dire,

$$\sum_1^{n-1}\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_i}\frac{\partial'\zeta}{\partial p_i}-\frac{\partial p_n}{\partial p_i}\frac{\partial'\zeta}{\partial q_i}\right)+\frac{\partial'\zeta}{\partial q_n}=0,$$

ou bien, en supprimant les accents qui sont devenus inutiles :

$$\sum_1^{n-1}\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_i}\frac{\partial\zeta}{\partial p_i}-\frac{\partial p_n}{\partial p_i}\frac{\partial\zeta}{\partial q_i}\right)+\frac{\partial\zeta}{\partial q_n}=0. \qquad (3)$$

En appliquant les mêmes calculs à l'équation :

$$(H, G)=1,$$

il vient :

$$\sum_1^{n-1}\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i}-\frac{\partial p_n}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}\right)+\frac{\partial G}{\partial q_n}=-\frac{1}{\frac{\partial H}{\partial p_n}},$$

et, en observant que l'on a :

$$\frac{\partial p_n}{\partial H}=\frac{1}{\frac{\partial H}{\partial p_n}},$$

on obtient l'équation :

$$\sum_1^{n-1}\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i}-\frac{\partial p_n}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}\right)+\frac{\partial G}{\partial q_n}=-\frac{\partial p_n}{\partial H}. \qquad (4)$$

L'équation (3) a les mêmes intégrales que l'équation (1), à l'exception de celle des forces vives $H=h$. C'est cette équation (3) qu'il faudra intégrer lorsque l'intégrale des forces vives sera seule connue.

144. Supposons ensuite qu'outre l'intégrale des forces vives :

$$H=h,$$

on connaisse une autre intégrale :

$$\alpha_1 = \varphi_1(q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n).$$

Si l'on exprime qu'une fonction :

$$\zeta = f(q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n),$$

donne identiquement (théorème de M. Bertrand) :

$$(\alpha_1, \zeta) = 0,$$

nous aurons une équation de la même forme que l'équation (1) :

$$(\alpha_1, \zeta) = \sum_i^n \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_i}\frac{\partial \zeta}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial p_i}\frac{\partial \zeta}{\partial q_i}\right) = 0. \qquad (5)$$

Cette équation est vérifiée par :

$$\zeta = \alpha_1, \ \alpha_3, \ \alpha_4, \dots \alpha_{2n-2}, \ H, \ G,$$

mais elle n'est pas vérifiée par :

$$\zeta = \alpha_2,$$

puisque l'on a :

$$(\alpha_1, \alpha_2) = 1.$$

Cela résulte du théorème que nous avons énoncé ci-dessus (n° 142), en vertu duquel on a :

$$(\alpha_1, \alpha_2) = 1,$$
$$(\alpha_1, \alpha_i) = 0, \quad (\text{pour } i = 1, 3, 4, \dots 2n - 2.)$$
$$(\alpha_1, G) = 0,$$
$$(\alpha_1, H) = 0.$$

Or, l'équation (5) étant vérifiée par $\zeta = H$, on pourra lui faire subir la même transformation qu'à l'équation (1). Il arrivera ainsi que cette opération qui a pour but d'enlever la solution connue $\zeta = H$, conduira à deux équations différentes, suivant que ζ sera égal à G, où à l'*une quelconque des autres intégrales de l'équation* (5).

Il résultera donc de là que, si l'on prend la deuxième forme,

c'est-à-dire celle qui correspond aux intégrales autres que G, on aura éliminé l'intégrale inconnue $\zeta = G$, la seule qui ne vérifie pas l'équation (1).

Pour transformer l'équation (5), on devra opérer comme nous l'avons fait pour transformer l'équation (1), c'est-à-dire que l'on devra remplacer dans (5) $\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_i}, \frac{\partial \zeta}{\partial q_i}$, etc., par les valeurs suivantes :

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_i} = \frac{\partial' \alpha_1}{\partial q_i} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial q_i} = \frac{\partial' \alpha_1}{\partial q_i} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial p_n}\frac{\frac{\partial H}{\partial q_i}}{\frac{\partial H}{\partial p_n}},$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial q_i} = \frac{\partial' \zeta}{\partial q_i} - \frac{\partial \zeta}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial q_i} = \frac{\partial' \zeta}{\partial q_i} + \frac{\partial \zeta}{\partial p_n}\frac{\frac{\partial H}{\partial q_i}}{\frac{\partial H}{\partial p_n}},$$

etc.

Nous aurons ainsi :

$$\begin{aligned}(\alpha_1, \zeta) = & \sum_1^{n-1}\left(\frac{\partial' \alpha_1}{\partial q_i}\frac{\partial' \zeta}{\partial p_i} - \frac{\partial' \alpha_1}{\partial p_i}\frac{\partial' \zeta}{\partial q_i}\right) + \left(\frac{\partial' \alpha_1}{\partial q_n}\frac{\partial' \zeta}{\partial p_n} - \frac{\partial' \alpha_1}{\partial p_n}\frac{\partial' \zeta}{\partial q_n}\right) \\ & + \frac{\frac{\partial \zeta}{\partial p_n}}{\frac{\partial H}{\partial p_n}}\left[\sum_1^{n-1}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial' \alpha_1}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial' \alpha_1}{\partial p_i}\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial p_n}\frac{\partial' \alpha_1}{\partial q_n} - \frac{\partial H}{\partial q_n}\frac{\partial' \alpha_1}{\partial p_n}\right)\right] \\ & + \frac{\frac{\partial \alpha_1}{\partial p_n}}{\frac{\partial H}{\partial p_n}}\left[\sum_1^{n-1}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial' \zeta}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial' \zeta}{\partial q_i}\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial q_n}\frac{\partial' \zeta}{\partial p_n} - \frac{\partial H}{\partial p_n}\frac{\partial' \zeta}{\partial q_n}\right)\right] \\ & + \frac{\frac{\partial \alpha_1}{\partial p_n}\frac{\partial \zeta}{\partial p_n}}{\left(\frac{\partial H}{\partial p_n}\right)^2}\sum_1^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) = 0.\end{aligned}$$

Or, les termes de la dernière somme se détruisent deux à deux ; en outre, puisque, comme nous l'avons dit précédemment, les

dérivées $\frac{\partial' \alpha_1}{\partial p_n}$, $\frac{\partial' \zeta}{\partial p_n}$ sont nulles, les termes qui contiennent ces dérivées sont nuls, et il nous reste l'équation :

$$(\alpha_1, \zeta) = \sum_1^{n-1} \left(\frac{\partial' \alpha_1}{\partial q_i} \frac{\partial' \zeta}{\partial p_i} - \frac{\partial' \alpha_1}{\partial p_i} \frac{\partial' \zeta}{\partial q_i} \right)$$

$$+ \frac{\frac{\partial \zeta}{\partial p_n}}{\frac{\partial H}{\partial p_n}} \left[\sum_1^{n-1} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial' \alpha_1}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial' \alpha_1}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial p_n} \frac{\partial' \alpha_1}{\partial q_n} \right]$$

$$+ \frac{\frac{\partial \alpha_1}{\partial p_n}}{\frac{\partial H}{\partial p_n}} \left[\sum_1^{n-1} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial' \zeta}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial' \zeta}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial H}{\partial p_n} \frac{\partial' \zeta}{\partial q_n} \right] = 0,$$

ou bien :

$$(\alpha_1, \zeta) = \sum_1^{n-1} \left(\frac{\partial' \alpha_1}{\partial q_i} \frac{\partial' \zeta}{\partial p_i} - \frac{\partial' \alpha_1}{\partial p_i} \frac{\partial' \zeta}{\partial q_i} \right)$$

$$+ \frac{\partial \zeta}{\partial p_n} \left[\sum_1^{n-1} \left(\frac{\partial p_n}{\partial q_i} \frac{\partial' \alpha_1}{\partial p_i} - \frac{\partial p_n}{\partial p_i} \frac{\partial' \alpha_1}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial' \alpha_1}{\partial q_n} \right]$$

$$- \frac{\partial \alpha_1}{\partial p_n} \left[\sum_1^{n-1} \left(\frac{\partial p_n}{\partial q_i} \frac{\partial' \zeta}{\partial p_i} - \frac{\partial p_n}{\partial p_i} \frac{\partial' \zeta}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial' \zeta}{\partial q_n} \right] = 0.$$

Mais, le coefficient de $\frac{\partial \zeta}{\partial p_n}$, c'est-à-dire,

$$\sum_1^{n-1} \left(\frac{\partial p_n}{\partial q_i} \frac{\partial' \alpha_1}{\partial p_i} - \frac{\partial p_n}{\partial p_i} \frac{\partial' \alpha_1}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial' \alpha_1}{\partial q_n},$$

est identiquement nul, puisque α_1 est une intégrale de l'équation (3).

Quant au coefficient de $\frac{\partial \alpha_1}{\partial p_n}$, lequel est :

$$\sum_1^{n-1} \left(\frac{\partial p_n}{\partial q_i} \frac{\partial' \zeta}{\partial p_i} - \frac{\partial p_n}{\partial p_i} \frac{\partial' \zeta}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial' \zeta}{\partial q_n},$$

il est nul, en vertu de l'équation (3), lorsque ζ représente une quelconque des quantités :

$$\alpha_1, \quad \alpha_3, \quad \dots \alpha_{2n-2};$$

au contraire, lorsque $\zeta = G$, il résulte de l'équation (4), que ce coefficient sera égal à $-\frac{\partial p_n}{\partial H}$.

Par conséquent, dans le cas où $\zeta = G$, le dernier terme de (α_1, ζ) sera :

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial H} = \frac{\partial' \alpha_1}{\partial H}.$$

Il résulte donc de là que la transformation de l'équation (5) nous conduit à la forme suivante :

$$\sum_1^{n-1}\left(\frac{\partial' \alpha_1}{\partial q_i}\frac{\partial' \zeta}{\partial p_i} - \frac{\partial' \alpha_1}{\partial p_i}\frac{\partial' \zeta}{\partial q_i}\right) = 0,$$

lorsque ζ représente l'une des intégrales :

$$\alpha_1, \alpha_3, \ldots \alpha_{2n-2};$$

tandis que, si ζ est égal à G, la transformation nous conduit à la forme :

$$\sum_1^{n-1}\left(\frac{\partial' \alpha_1}{\partial q_i}\frac{\partial' G}{\partial p_i} - \frac{\partial' \alpha_1}{\partial p_i}\frac{\partial' G}{\partial q_i}\right) = -\frac{\partial' \alpha_1}{\partial H}.$$

En supprimant les accents, ces deux équations deviennent :

$$\sum_1^{n-1}\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_i}\frac{\partial \zeta}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial p_i}\frac{\partial \zeta}{\partial q_i}\right) = 0, \qquad (6)$$

pour $\zeta = \alpha_1, \alpha_3, \ldots \alpha_{2n-2}$;

$$\sum_1^{n-1}\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}\right) = -\frac{\partial \alpha_1}{\partial H}. \qquad (7)$$

On trouverait de même que l'intégrale α_2 satisfait à l'équation :

$$\sum_1^{n-1}\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_i}\frac{\partial \alpha_2}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial p_i}\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_i}\right) = 1. \qquad (8)$$

L'équation (6) est tout à fait semblable à l'équation (1), et elle aura pour intégrales :

$$\alpha_1, \alpha_3, \ldots \alpha_{2n-2},$$

qui sont des intégrales du problème, et qui donnent :

$$(\alpha_1, \alpha_i) = 0.$$

L'équation (6) contient deux termes de moins que l'équation (1); elle a, comme on voit, les mêmes intégrales que l'équation (1), sauf α_2 et H. Cette équation (6) est déduite de l'équation (5), et l'on voit qu'en éliminant l'intégrale $\zeta = H$, on a aussi éliminé l'intégrale $\zeta = G$, c'est-à-dire la conjuguée de H.

En résumé donc, l'équation :

$$(H, \zeta) = 0, \tag{1}$$

est vérifiée par :

$$H,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_{2n-2}.$$

Connaissant, outre l'intégrale des forces vives $H = h$, une autre intégrale α_1, on cherche à déterminer une équation plus simple que l'équation (1). On détermine une équation, qui est l'équation (6), laquelle a la même forme que l'équation (1), mais qui a deux termes de moins, et qui a pour intégrales :

$$\alpha_1,\ \alpha_3,\ \ldots\ \alpha_{2n-2}.$$

En d'autres termes, la connaissance de l'intégrale α_1 nous permet de déterminer une nouvelle équation à laquelle satisfont les intégrales $\alpha_3, \ldots \alpha_{2n-2}$. La connaissance de α_1 permet d'éliminer sa conjuguée α_2, qui n'est pas une intégrale de l'équation réduite, et la question est ramenée à intégrer une équation plus simple que (1).

145. Soit α_3 une intégrale de l'équation (6). On peut concevoir que l'on complète (théorème de M. Bertrand) la solution du problème au moyen de l'intégrale α_1, et d'intégrales $\alpha_4, \alpha_5, \ldots \alpha_{2n-2}$, qui, avec α_3, forment $2n - 3$ intégrales de (6), et telles que l'on ait :

$$(\alpha_3, \alpha_i) = 0,$$

pour $i = 5, 6, \ldots 2n - 2$, mais que l'on ait :

$$(\alpha_3, \alpha_4) = 1.$$

De plus, on aura :

$$(\alpha_1, \alpha_i) = 0,$$

pour $i = 3, 4, 5, \ldots 2n - 2$, puisque toutes ces intégrales satisfont à l'équation (5).

Cela admis, au moyen de l'intégrale :

$$\alpha_1 = \varphi(\mathrm{H}, q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_{n-1}),$$

on tire :

$$p_{n-1} = f(\mathrm{H}, \alpha_1, q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_{n-2}).$$

Si l'on substitue cette valeur dans α_3, et si l'on calcule les coefficients de l'équation :

$$(\alpha_3, \zeta) = 0,$$

c'èst-à-dire les dérivées :

$$\frac{\partial \alpha_3}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial \alpha_3}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial p_i},$$

qui entrent dans l'équation :

$$\sum_1^{n-1} \left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial q_i} \frac{\partial \zeta}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha_3}{\partial p_i} \frac{\partial \zeta}{\partial q_i} \right) = 0,$$

on arrivera à l'équation :

$$\sum_1^{n-2} \left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial q_i} \frac{\partial \zeta}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha_3}{\partial p_i} \frac{\partial \zeta}{\partial q_i} \right) = 0, \tag{9}$$

qui a deux termes de moins que l'équation (6) et qui aura pour intégrales :

$$\alpha_3, \alpha_5, \dots \alpha_{2n-2},$$

c'est-à-dire que l'on a éliminé en même temps les intégrales α_1 et α_4.

L'intégrale α_4 satisfait à l'équation :

$$\sum_1^{n-2} \left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial q_i} \frac{\partial \alpha_4}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha_3}{\partial p_i} \frac{\partial \alpha_4}{\partial q_i} \right) = 1, \tag{10}$$

analogue à l'équation (8), mais qui a deux termes de moins.

L'équation (9) a donc les mêmes intégrales que l'équation (6), sauf α_1 et α_4.

146. On peut, comme on voit, au moyen de chaque intégrale connue, diminuer de deux unités le nombre des termes, et le nombre des variables. Cette diminution provient de ce que *chaque intégrale connue permet d'éliminer sa conjuguée, qui est étrangère à l'équation réduite.*

On peut ainsi de proche en proche (du moins en théorie) obtenir une série d'équations analogues à (1), (6), (9), etc., et l'on parvient ainsi à mettre la solution du problème sous la forme de $2n$ intégrales conjuguées deux à deux :

$$a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n,$$

$$b_1,\ b_2,\ \ldots\ b_n,$$

telles que l'on ait :

$$(a_i,\ b_i) = 1,\quad (a_i,\ a_{i'}) = 0,\quad (a_i,\ b_{i'}) = 0.$$

147. Voici maintenant comment on doit transformer les intégrales du problème, telles qu'elles sont immédiatement obtenues (*), pour obtenir des solutions des équations (1), (6), (9), etc.

Si l'on connaît une intégrale quelconque β_1, indépendante du temps, on peut poser $\alpha_1 = \beta_1$, et rien n'empêche de supposer que les autres intégrales, qui sont inconnues, forment un système du genre de celles dont le théorème de M. Bertrand démontre la possibilité.

On calculera au moyen de l'équation $\alpha_1 = \beta_1$ les coefficients de l'équation (6) qui a pour intégrales :

$$\alpha_1,\ \alpha_3,\ \ldots\ \alpha_{2n-1}.$$

Supposons maintenant que l'on connaisse encore une seconde intégrale du problème β_2, aussi indépendante du temps; cette intégrale β_2, quoiqu'étant une intégrale du problème, peut fort bien n'être pas une intégrale α, et, par conséquent, on ne peut

(*) En général, les intégrales obtenues par un procédé quelconque ne seront pas des intégrales α, c'est-à-dire ne seront pas des intégrales telles que l'on ait $(\alpha_i,\ \alpha_{i'}) = 0$.

pas poser, en général, $\beta_2 = \alpha_3$. On ne pourra le faire, comme nous allons le voir, que si l'on a identiquement :

$$(\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1, \beta_2) = 0.$$

Pour continuer l'abaissement, lorsque l'on connaîtra cette seconde intégrale β_2, on formera la quantité (β_1, β_2), et il peut se présenter trois cas :

1° Si l'on a identiquement $(\beta_1, \beta_2) = 0$, on peut poser :

$$\alpha_3 = \beta_2,$$

et l'on formera l'équation (9) qui a deux termes de moins que l'équation (6);

2° Si (β_1, β_2) est une constante numérique que l'on peut toujours supposer égale à l'unité, alors β_2 est la conjuguée de β_1, et ne peut pas servir à continuer l'abaissement : en effet, la méthode qui a conduit à l'équation (6) consistait à éliminer de la solution l'intégrale conjuguée de α_1, qui est alors étrangère à l'équation réduite;

3° Si $(\beta_1, \beta_2) = \beta_3$ est une fonction de $p_1, p_2, \ldots p_n, q_1, q_2, \ldots q_n$, cette fonction, égalée à une constante, est une nouvelle intégrale du problème.

On formera les expressions :

$$(\beta_1, \beta_3) = \beta_4, \quad (\beta_1, \beta_4) = \beta_5, \quad \ldots,$$

jusqu'à ce que l'on obtienne une fonction :

$$(\beta_1, \beta_{k-1}) = \beta_k = f(\mathrm{H}, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{k-1}),$$

c'est-à-dire qui soit fonction des précédentes et de H.

On cherchera alors une fonction :

$$\varpi(\mathrm{H}, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{k-1}),$$

telle que l'on ait :

$$(\beta_1, \varpi) = 0,$$

et l'on trouvera l'équation différentielle partielle linéaire :

$$\beta_3 \frac{\partial \varpi}{\partial \beta_2} + \beta_4 \frac{\partial \varpi}{\partial \beta_3} + \cdots + \beta_k \frac{\partial \varpi}{\partial \beta_{k-1}} = 0.$$

Cette équation nous permettra de trouver $k-3$ intégrales du problème, fonctions de $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{k-1}$ et de H, et dont l'une quelconque peut être prise pour l'intégrale α_3. Les autres satisfont à l'équation (6), et pourront être employées pour l'abaissement de cette équation, de la même manière que les premières ont servi à l'abaissement de (1).

148. Nous avons vu comment au moyen des intégrales qui sont connues, on peut abaisser l'ordre de l'équation aux dérivées partielles du problème. Cette ressource épuisée, nous allons voir l'usage que l'on peut faire des équations réduites pour continuer l'intégration.

Si, par exemple, on ne connaît pas d'autre intégrale que α_1, on appliquera à l'équation (6) la méthode qui nous a servi à former l'équation (3), c'est-à-dire que l'on éliminera p_{n-1}, exprimée en fonction de α_1, H, $q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_{n-2}$.

On opérera de la même manière sur les équations (7) et (8), et l'on aura ainsi :

$$\sum_1^{n-2}\left(\frac{\partial p_{n-1}}{\partial q_i}\frac{\partial \zeta}{\partial p_i}-\frac{\partial p_{n-1}}{\partial p_i}\frac{\partial \zeta}{\partial q_i}\right)+\frac{\partial \zeta}{\partial q_{n-1}}=0, \tag{11}$$

$$\sum_1^{n-2}\left(\frac{\partial p_{n-1}}{\partial q_i}\frac{\partial \alpha_2}{\partial p_i}-\frac{\partial p_{n-1}}{\partial p_i}\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_i}\right)+\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_{n-1}}=-\frac{\partial p_{n-1}}{\partial \alpha_1}, \tag{12}$$

$$\sum_1^{n-2}\left(\frac{\partial p_{n-1}}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i}-\frac{\partial p_{n-1}}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}\right)+\frac{\partial G}{\partial q_{n-1}}=\frac{\partial p_{n-1}}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial H}. \tag{13}$$

Or, il est facile de voir que l'on a :

$$\frac{\partial p_{n-1}}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial H}=-\frac{\partial p_{n-1}}{\partial H}.$$

En effet, de l'équation :

$$\alpha_1=\varphi(H, p_1, p_2, \cdots p_{n-1}, q_1, q_2, \ldots q_n),$$

on tire :

$$p_{n-1}=f(\alpha_1, H, p_1, p_2, \ldots p_{n-2}, q_1, q_2, \ldots q_n).$$

Mais, si l'on remplace dans le second membre de cette der-

nière équation α_1 par sa valeur en fonction de $p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$, $q_1, q_2, \ldots q_n$, H, on obtiendra une identité.

En différentiant cette identité par rapport à H, il vient :

$$\frac{\partial p_{n-1}}{\partial H} + \frac{\partial p_{n-1}}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial H} = 0.$$

L'équation (13) se réduit donc à la suivante :

$$\sum_1^{n-2}\left(\frac{\partial p_{n-1}}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial p_{n-1}}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial G}{\partial q_{n-1}} = -\frac{\partial p_{n-1}}{\partial H}. \qquad (14)$$

Nous pouvons encore transformer les équations (3) et (4), en remplaçant la variable p_{n-1} en fonction de α_1, et l'équation (3) nous donnera deux équations différentes, suivant que ζ sera égal à α_2, ou à une autre quelconque des quantités $\alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_{2n-2}$ (*).

On obtiendra ainsi trois équations analogues à (11), (12) et (14) avec cette différence que p_{n-1} et q_{n-1} seront remplacés par p_n et q_n, et l'on aura :

$$\sum_1^{n-2}\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_i}\frac{\partial \zeta}{\partial p_i} - \frac{\partial p_n}{\partial p_i}\frac{\partial \zeta}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial \zeta}{\partial q_n} = 0, \qquad (15)$$

$$\sum_1^{n-2}\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_i}\frac{\partial \alpha_2}{\partial p_i} - \frac{\partial p_n}{\partial p_i}\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial \alpha_2}{\partial q_n} = -\frac{\partial p_n}{\partial \alpha_1}, \qquad (16)$$

$$\sum_1^{n-2}\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial p_n}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial G}{\partial q_n} = -\frac{\partial p_n}{\partial H}. \qquad (17)$$

Or, il résulte des raisonnements précédents que l'équation (3) a les mêmes intégrales que (1), sauf H; l'équation (11) a les mêmes intégrales que (6), sauf α_1; l'équation (15) a les mêmes intégrales que (3), sauf α_1 et α_2.

L'équation (1) ayant pour intégrales :

$$H, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n-2},$$

(*) Dans cette transformation, p_{n-1}, α_1 et α_2 joueront le même rôle que p_n, H et G dans la transformation de l'équation (5).

il en résulte que (3) aura pour intégrales :

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_{2n-2}.$$

L'équation (6) ayant pour intégrales :

$$\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \dots \alpha_{2n-2},$$

l'équation (11) aura pour intégrales :

$$\alpha_3, \quad \alpha_4, \quad \dots \alpha_{2n-2}.$$

Enfin, l'équation (15) aura pour intégrales :

$$\alpha_3, \quad \alpha_4, \quad \dots \alpha_{2n-2}.$$

Les équations (11) et (15) admettent donc toutes les deux pour intégrales $\alpha_3, \alpha_4, \dots \alpha_{2n-2}$. Ces fonctions, étant au nombre de $2n - 4$, forment la solution complète de chacune de ces équations, et toutes sont des intégrales du problème. Cependant, comme q_n est considérée comme constante dans l'intégration de (11), et q_{n-1} dans l'intégration de (15), il s'ensuit qu'une intégrale de la première, par exemple, ne satisfait pas nécessairement au problème (*).

En d'autres termes, toutes les intégrales du problème :

$$\alpha_3, \quad \alpha_4, \quad \dots \alpha_{2n-2},$$

satisfont aux équations (11) et (15). Mais il n'en résulte pas réciproquement que toute solution de (11) ou de (15) est une intégrale du problème.

En effet, supposons que l'on connaisse :

$$\alpha_3, \quad \alpha_4, \quad \dots \alpha_{2n-2},$$

qui sont des intégrales du problème, et, par conséquent, de (11). Si l'on pose :

$$\zeta = \psi(\alpha_3, \ \alpha_4, \ \dots \alpha_{2n-2}, \ q_n),$$

(*) Ainsi, $q_n = const.$ est une intégrale de (11), et $q_{n-1} = const.$ une intégrale de (15), et ces deux intégrales ne sont pas des solutions du problème.

ψ étant une fonction arbitraire, cette équation ne sera plus une intégrale du problème, et cependant elle sera encore une intégrale de (11).

Il résulte de là que l'on ne peut pas remplacer purement et simplement l'équation (3) par les équations (11) et (15), puisque ces dernières admettent des solutions étrangères au problème, quoique l'on puisse former leur intégrale générale uniquement avec les intégrales de (1) et (3).

Nous pouvons remarquer que les intégrales du problème sont les seules intégrales communes aux équations (11) et (15).

149. Nous allons maintenant montrer quelle est la marche à suivre pour résoudre la question.

Supposons que l'on connaisse les deux intégrales :

$$\mathrm{H} = f(q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n),$$

$$\alpha_1 = f_1(q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n).$$

Résolvons ces deux équations par rapport à p_n et p_{n-1}, et calculons les coefficients des équations :

$$\sum_1^{n-2} \left(\frac{\partial p_{n-1}}{\partial q_i} \frac{\partial \zeta}{\partial p_i} - \frac{\partial p_{n-1}}{\partial p_i} \frac{\partial \zeta}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial \zeta}{\partial q_{n-1}} = 0, \qquad (11)$$

$$\sum_1^{n-2} \left(\frac{\partial p_n}{\partial q_i} \frac{\partial \zeta}{\partial p_i} - \frac{\partial p_n}{\partial p_i} \frac{\partial \zeta}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial \zeta}{\partial q_n} = 0. \qquad (15)$$

Cela posé, cherchons à intégrer l'une de ces équations.

Soit ζ_1 une intégrale de la première, par exemple; remplaçons ζ par ζ_1 dans la seconde (15). Si le premier membre est identiquement nul, ζ_1 sera une intégrale du problème.

Si le premier membre de (15) n'est pas identiquement nul, soit Z_1 le résultat de la substitution. Je dis que $Z_1 = const.$ sera une nouvelle intégrale de (11). En effet, d'après la théorie des équations différentielles partielles linéaires, ζ_1 doit être de la forme :

$$\zeta_1 = \varphi(\alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_{2n-2}, q_n).$$

Si nous remplaçons ζ par cette valeur dans l'équation (15), nous aurons à remplacer $\frac{\partial\zeta_1}{\partial p_i}$, $\frac{\partial\zeta_1}{\partial q_i}$, etc., par les valeurs suivantes :

$$\frac{\partial\zeta_1}{\partial p_i} = \frac{\partial\zeta_1}{\partial\alpha_3}\frac{\partial\alpha_3}{\partial p_i} + \dots + \frac{\partial\zeta_1}{\partial\alpha_{2n-2}}\frac{\partial\alpha_{2n-2}}{\partial p_i},$$

$$\frac{\partial\zeta_1}{\partial q_i} = \frac{\partial\zeta_1}{\partial\alpha_3}\frac{\partial\alpha_3}{\partial q_i} + \dots + \frac{\partial\zeta_1}{\partial\alpha_{2n-2}}\frac{\partial\alpha_{2n-2}}{\partial q_i},$$

$$\frac{\partial\zeta_1}{\partial q_n} = \frac{\partial\zeta_1}{\partial\alpha_3}\frac{\partial\alpha_3}{\partial q_n} + \dots + \frac{\partial\zeta_1}{\partial\alpha_{2n-2}}\frac{\partial\alpha_{2n-2}}{\partial q_n} + \frac{\partial\zeta_1}{\partial q_n}.$$

Substituant dans le premier membre de (15), il vient :

$$\begin{aligned}
Z_1 = {} & \frac{\partial\zeta_1}{\partial\alpha_3}\left[\sum_1^{n-2}\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_i}\frac{\partial\alpha_3}{\partial p_i} - \frac{\partial p_n}{\partial p_i}\frac{\partial\alpha_3}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial\alpha_3}{\partial q_n}\right] \\
& + \frac{\partial\zeta_1}{\partial\alpha_4}\left[\sum_1^{n-2}\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_i}\frac{\partial\alpha_4}{\partial p_i} - \frac{\partial p_n}{\partial p_i}\frac{\partial\alpha_4}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial\alpha_4}{\partial q_n}\right] \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \frac{\partial\zeta_1}{\partial\alpha_{2n-2}}\left[\sum_1^{n-2}\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_i}\frac{\partial\alpha_{2n-2}}{\partial p_i} - \frac{\partial p_n}{\partial p_i}\frac{\partial\alpha_{2n-2}}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial\alpha_{2n-2}}{\partial q_n}\right] \\
& + \frac{\partial\zeta_1}{\partial q_n}.
\end{aligned}$$

Or, tous les coefficients du second membre sont nuls, puisque $\alpha_3, \alpha_4, \dots \alpha_{2n-2}$ sont des intégrales de (15), et il vient :

$$Z_1 = \frac{\partial\zeta_1}{\partial q_n}.$$

Mais, $\frac{\partial\zeta_1}{\partial q_n}$ sera une fonction de $\alpha_3, \alpha_4, \dots \alpha_{2n-2}, q_n$, puisque ζ_1 est une fonction de ces quantités. Par suite, $\frac{\partial\zeta_1}{\partial q_n}$ ou Z_1 est une intégrale de l'équation (11). Cette intégrale en fournira d'autres, soit par une nouvelle application du théorème, c'est-à-dire en remplaçant dans (15) ζ par Z_1, soit par la combinaison de Z_1 avec ζ_1 pour former la fonction de Poisson :

$$(\zeta_1,\ Z_1).$$

Nous aurons ainsi une série d'intégrales distinctes de l'équa-

tion (11), dont le nombre sera limité au plus tard lorsqu'elles formeront la solution complète de (11).

Nous pouvons donc considérer ces intégrales de l'équation (11) comme formant un système canonique partiel :

$$a_1, \quad a_2, \quad \dots a_k,$$
$$b_1, \quad b_2, \quad \dots b_k,$$

c'est-à-dire tel que l'on ait :

$$(a_i, b_i) = 1, \quad (a_i, b_{i'}) = 0, \quad (a_i, a_{i'}) = 0,$$

pour des valeurs des indices comprises entre 1 et k, le nombre k pouvant d'ailleurs être égal ou inférieur à $n - 2$.

Cela posé, si nous remplaçons successivement dans (15), ζ par a_1, b_1, a_2, b_2, ... a_k, b_k, nous obtiendrons des résultats qui seront des fonctions de ces mêmes quantités seulement et de q_n; sans cela, d'après ce que nous venons de voir, ces résultats fourniraient de nouvelles intégrales de (11), ce qui n'est pas possible, puisque nous avons épuisé ce procédé qui nous a fourni les intégrales a_1, b_1, ... a_k, b_k.

Désignons ces résultats respectivement par A_1, B_1, A_2, B_2, ... Cela posé, je dis qu'il existe $2k$ intégrales du problème qui sont des fonctions des variables a et b, et de q_n; en effet, si nous substituons dans (15) :

$$\zeta = \varphi(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots a_k, b_k, q_n),$$

et si nous exprimons que le résultat est nul, il est facile de voir que l'on a :

$$A_1 \frac{\partial \zeta}{\partial a_1} + B_1 \frac{\partial \zeta}{\partial b_1} + \dots + A_k \frac{\partial \zeta}{\partial a_k} + B_k \frac{\partial \zeta}{\partial b_k} + \frac{\partial \zeta}{\partial q_n} = 0. \tag{18}$$

Or, cette équation différentielle partielle admet $2k$ intégrales. Ces $2k$ intégrales sont des intégrales du problème : en effet, elles satisfont à l'équation (15); en outre, elles sont des fonctions des variables a et b et de q_n, donc, elles satisfont aussi à l'équa-

tion (11). Ce sont donc des intégrales communes à (11) et (15), et, par conséquent, des intégrales du problème.

150. Il est facile de s'assurer que l'équation (18) a précisément la même forme que les équations (3), (11) et (15), c'est-à-dire que l'on a (n° **151**) :

$$A_i = \frac{\partial L}{\partial b_i}, \quad B_i = -\frac{\partial L}{\partial a_i},$$

L étant une fonction de $a_1, a_2, \ldots a_k, b_1, b_2, \ldots b_k$ que l'on détermine par une quadrature.

L'équation (18) prend alors la forme suivante :

$$\sum_1^k \left(\frac{\partial L}{\partial b_i}\frac{\partial \zeta}{\partial a_i} - \frac{\partial L}{\partial a_i}\frac{\partial \zeta}{\partial b_i}\right) + \frac{\partial \zeta}{\partial q_n} = 0. \tag{19}$$

Cette dernière équation n'admet plus d'intégrale étrangère au problème : elle est, au plus, de l'ordre $n-2$, c'est-à-dire du même ordre que les équations (11) et (15). Elle peut être d'un ordre inférieur, suivant la valeur de k, c'est-à-dire que l'intégrale ζ_1, étrangère au problème, permettra d'abaisser son degré.

151. Proposons-nous maintenant de démontrer que l'on a :

$$A_i = \frac{\partial L}{\partial b_i}, \quad B_i = -\frac{\partial L}{\partial a_i};$$

à cet effet, nous allons prouver que l'on a :

$$\frac{\partial A_1}{\partial b_2} = \frac{\partial A_2}{\partial b_1}.$$

En différentiant par rapport à q_n l'équation :

$$(a_1, a_2) = \sum \left(\frac{\partial a_1}{\partial q_i}\frac{\partial a_2}{\partial p_i} - \frac{\partial a_1}{\partial p_i}\frac{\partial a_2}{\partial q_i}\right) = 0,$$

il vient :

$$\sum \left(\frac{\partial a_1}{\partial q_i}\frac{\partial^2 a_2}{\partial q_n \partial p_i} - \frac{\partial a_1}{\partial p_i}\frac{\partial^2 a_2}{\partial q_n \partial q_i}\right) = \sum \left(\frac{\partial a_2}{\partial q_i}\frac{\partial^2 a_1}{\partial q_n \partial p_i} - \frac{\partial a_2}{\partial p_i}\frac{\partial^2 a_1}{\partial q_n \partial q_i}\right). \tag{20}$$

Or, A_1 étant le résultat que l'on obtient en remplaçant ζ par a_1 dans l'équation (15), il s'ensuit que A_1 est définie par l'équation :

$$A_1 = \frac{\partial p_n}{\partial q_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_1} - \frac{\partial p_n}{\partial p_1}\frac{\partial a_1}{\partial q_1} + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial q_{n-2}}\frac{\partial a_1}{\partial p_{n-2}} - \frac{\partial p_n}{\partial p_{n-2}}\frac{\partial a_1}{\partial q_{n-2}} + \frac{\partial a_1}{\partial q_n}.$$

Différentiant par rapport à p_i et à q_i, il vient :

$$\frac{\partial^2 a_1}{\partial q_n \partial p_i} = \frac{\partial A_1}{\partial p_i} - \frac{\partial p_n}{\partial q_1}\frac{\partial^2 a_1}{\partial p_1 \partial p_i} + \frac{\partial p_n}{\partial p_1}\frac{\partial^2 a_1}{\partial p_i \partial q_1} - \cdots$$
$$- \frac{\partial a_1}{\partial p_1}\frac{\partial^2 p_n}{\partial q_1 \partial p_i} + \frac{\partial a_1}{\partial q_1}\frac{\partial^2 p_n}{\partial p_i \partial p_1} + \cdots,$$

$$\frac{\partial^2 a_1}{\partial q_n \partial q_i} = \frac{\partial A_1}{\partial q_i} - \frac{\partial p_n}{\partial q_1}\frac{\partial^2 a_1}{\partial p_1 \partial q_i} + \frac{\partial p_n}{\partial p_1}\frac{\partial^2 a_1}{\partial q_i \partial q_1} - \cdots$$
$$- \frac{\partial a_1}{\partial p_1}\frac{\partial^2 p_n}{\partial q_1 \partial q_i} + \frac{\partial a_1}{\partial q_1}\frac{\partial^2 p_n}{\partial q_i \partial p_1} + \cdots$$

On obtiendrait de la même manière les dérivées :

$$\frac{\partial^2 a_2}{\partial q_n \partial p_i}, \quad \frac{\partial^2 a_2}{\partial q_n \partial q_i},$$

en opérant sur l'équation qui définit A_2, c'est-à-dire sur le résultat de la substitution de a_2 à la place de ζ dans l'équation (15).

Substituant dans l'équation (20), on a :

$$(a_1, A_2) = (a_2, A_1).$$

En effet, il est facile de voir que, par cette substitution, il ne reste que les premiers termes des dérivées $\frac{\partial^2 a_1}{\partial q_n \partial p_i}$, $\frac{\partial^2 a_1}{\partial q_n \partial q_i}$, etc., tous les autres termes se détruisant. Ainsi, si nous cherchons d'abord ce qui multiplie une des dérivées secondes de p_n, par exemple $\frac{\partial^2 p_n}{\partial p_1 \partial q_1}$, nous trouvons dans le premier membre :

$$-\frac{\partial a_1}{\partial q_1}\frac{\partial a_2}{\partial p_1} - \frac{\partial a_2}{\partial q_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_1},$$

et dans le second membre les mêmes termes avec les mêmes signes.

Si nous cherchons ensuite le coefficient d'une dérivée première de p_n, par exemple le coefficient de $\frac{\partial p_n}{\partial q_1}$, nous trouverons que ce coefficient est, en faisant passer tous les termes dans le premier membre :

$$\sum\left(\frac{\partial a_1}{\partial q_i}\frac{\partial^2 a_2}{\partial p_i \partial p_1}+\frac{\partial a_2}{\partial p_i}\frac{\partial^2 a_1}{\partial q_i \partial p_1}-\frac{\partial a_1}{\partial p_i}\frac{\partial^2 a_2}{\partial q_i \partial p_1}-\frac{\partial a_2}{\partial q_i}\frac{\partial^2 a_1}{\partial p_i \partial p_1}\right).$$

Or, cette expression est précisément la dérivée par rapport à p_1 de (a_1, a_2) : cette somme est donc nulle, puisque (a_1, a_2) est identiquement nulle. Par suite, l'équation (20) se réduit à :

$$(a_1, A_2) = (a_2, A_1). \qquad (21)$$

Mais, A_2 étant une fonction de $a_1, b, \dots a_k, b_k, q_n$, on a :

$$(a_1, A_2) = (a_1, a_1)\frac{\partial A_2}{\partial a_1} + (a_1, b_1)\frac{\partial A_2}{\partial b_1} + \dots = \frac{\partial A_2}{\partial b_1},$$

puisque tous les coefficients sont nuls, excepté (a_1, b_1) qui est égal à l'unité (n° **149**).

De même, on a :

$$(a_2, A_1) = \frac{\partial A_1}{\partial b_2};$$

par conséquent, l'équation (21) nous donne :

$$\frac{\partial A_2}{\partial b_1} = \frac{\partial A_1}{\partial b_2}.$$

On aurait de même :

$$\frac{\partial A_1}{\partial b_1} = -\frac{\partial B_1}{\partial a_1},$$

le signe — provenant de ce que, si l'on a $(a_1, b_1) = 1$, on a $(b_1, a_1) = -1$.

152. *Remarque.* — Nous avons supposé que les variables a et b formaient un système canonique; mais, ce système peut être incomplet. Si la variable a_k, par exemple, n'a pas de con-

juguée, c'est-à-dire si l'on s'était trouvé arrêté avant d'obtenir b_k, on aurait pour tout indice i, compris entre 1 et $k-1$:

$$(a_k, a_i) = 0, \quad (a_k, b_i) = 0.$$

On en déduirait, par la méthode qui précède :

$$\frac{\partial A_k}{\partial a_i} = 0, \quad \frac{\partial A_k}{\partial b_i} = 0,$$

c'est-à-dire que A_k serait une fonction de a_k et de q_n seulement.

L'équation (19) devient alors :

$$\sum_1^{k-1} \left(\frac{\partial L}{\partial b_i} \frac{\partial \zeta}{\partial a_i} - \frac{\partial L}{\partial a_i} \frac{\partial \zeta}{\partial b_i} \right) + A_k \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial \zeta}{\partial q_n} = 0,$$

et l'on en obtiendrait une intégrale en intégrant l'équation du premier ordre :

$$A_k \frac{\partial \zeta}{\partial a_k} + \frac{\partial \zeta}{\partial q_n} = 0.$$

153. Quand on connaîtra la moitié des intégrales du problème, les équations telles que (11) et (15) deviendront illusoires. Il ne nous restera plus alors à trouver que des intégrales conjuguées, lesquelles seront données par les équations (4), (12), (14), (16), (17), etc., qui se réduisent à :

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_n} = -\frac{\partial p_n}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{\partial a_3}{\partial q_{n-1}} = -\frac{\partial p_{n-1}}{\partial \alpha_1}, \quad \ldots$$

$$\frac{\partial G}{\partial q_n} = -\frac{\partial p_n}{\partial H}, \quad \frac{\partial G}{\partial q_{n-1}} = -\frac{\partial p_{n-1}}{\partial H}, \quad \ldots$$

Les sommes ont disparu, puisque la connaissance de $n-1$ intégrales autres que celle des forces vives a fait disparaître successivement un nombre de termes égal à $2(n-1) = 2n-2$.

Des équations qui précèdent, on tire :

$$d\alpha_2 = -\left(\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_1} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial \alpha_1} dq_2 + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial \alpha_1} dq_n \right),$$

expression qui est une différentielle exacte.

On peut donc calculer les intégrales conjuguées par les équations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_2 = -\int\left(\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_1} dq_1 + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial \alpha_1} dq_n\right), \\ \alpha_4 = -\int\left(\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_3} dq_1 + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial \alpha_3} dq_n\right), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ G = -\int\left(\frac{\partial p_1}{\partial H} dq_1 + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial H} dq_n\right).\end{array}\right\} \quad (22)$$

Mais, ces équations peuvent être mises sous une forme plus simple; en effet, nous avons supposé identiquement nulles les quantités telles que :

$$(\alpha_1, \alpha_3) = 0,$$

qui résultent de la combinaison deux à deux des intégrales $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \ldots \alpha_{2n-3}$. Or, M. Liouville a démontré (n° **71**) que, dans ces conditions, l'expression :

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n,$$

est toujours la différentielle exacte d'une fonction de $q_1, q_2, \ldots q_n$ (*). Donc, en désignant par V cette intégrale, on pourra écrire les intégrales (22) sous la forme suivante :

$$\alpha_2 = -\frac{\partial V}{\partial \alpha_1}, \quad \alpha_4 = -\frac{\partial V}{\partial \alpha_3}, \quad \ldots \quad G = -\frac{\partial V}{\partial H}. \qquad (23)$$

154. *Remarque I.* — Ce résultat est d'ailleurs conforme au théorème de M. Liouville (n° **73**). En effet, d'après ce théorème, on sait que, connaissant la moitié des intégrales du problème, satisfaisant à la condition $(\alpha_\mu, \alpha_\nu) = 0$, on peut tirer des intégrales connues les valeurs de $p_1, p_2, \ldots p_n$; la quantité :

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \ldots + p_n dq_n,$$

est la différentielle exacte d'une fonction V.

(*) En effet, $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \ldots \alpha_{2n-3}$, H forment la moitié des intégrales du problème.

Les intégrales qui complètent la solution du problème sont alors données par les équations :

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = -\alpha_2, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_3} = -\alpha_4, \quad \dots \quad G = -\frac{\partial V}{\partial H}.$$

155. *Remarque II.* — Nous avons supposé jusqu'ici que le principe des forces vives était applicable, c'est-à-dire que la quantité H ne renfermait pas explicitement le temps : c'est ce que Bour avait supposé dans son mémoire. Mais M. Liouville (*) a fait remarquer que la théorie de Bour s'étend au cas où l'on considère les équations canoniques, abstraction faite de la dynamique, c'est-à-dire lorsque H est une fonction de t, $q_1, q_2, \dots q_n$, $p_1, p_2, \dots p_n$.

En effet, l'équation qui exprime que α est une intégrale des équations canoniques, c'est-à-dire que la dérivée totale $\frac{d\alpha}{dt}$ est nulle, en vertu des équations canoniques, est :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \sum_1^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial \alpha}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial \alpha}{\partial q_i} \right) = 0.$$

Or, cette équation a précisément la même forme que les équations (3), (11), (15), (19), ...

Toutes les équations sont ramenées à un type uniforme, H et t jouent ici le même rôle que deux variables conjuguées p_i, q_i.

Si H est indépendant du temps t, le problème admet pour intégrale $H = const.$, de même qu'il admettrait pour intégrale $p_i = const.$, si H était indépendant de q_i.

(*) *Journal de Liouville*, t. XX, p. 136; *Rapport de M. Liouville.*

XXII.

Variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique.

156. Supposons que la fonction H puisse être décomposée en deux fonctions H_1 et Ω, de sorte que les équations à intégrer :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

deviennent :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H_1}{\partial p_i} + \frac{\partial \Omega}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H_1}{\partial q_i} - \frac{\partial \Omega}{\partial q_i}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Supposons que les équations canoniques :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H_1}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H_1}{\partial q_i}, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

puissent être intégrées, et soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n}$, les constantes d'intégration, telles que l'on ait :

$$\alpha_i = \varphi(t, q_1, \ldots q_n, p_1, \ldots p_n). \qquad (4)$$

La fonction Ω est, en général, très petite par rapport à H_1 : on l'appelle *fonction perturbatrice*. Les équations (2) s'appellent les *équations du mouvement troublé;* les équations (3) sont les *équations du mouvement non troublé*. Dans la plupart des cas, la fonction Ω ne dépend que des positions des points mobiles, c'est-à-dire des variables q_i; elle est indépendante des p_i.

Nous considérerons le cas général où la fonction Ω dépend des p_i, q_i et de t.

Nous supposerons que les intégrales des équations (2) aient la même forme (4) que les intégrales des équations (3); mais nous supposerons que les α_i qui étaient constantes dans les intégrales des équations (3), c'est-à-dire dans le mouvement non troublé, deviennent des fonctions de t dans les intégrales du mouvement troublé (2). Ainsi, d'après cela, les dérivées de p_i, q_i par rapport à t, en considérant les α_i comme des constantes, satisfont aux équations (3), tandis que les dérivées, prises en considérant les α_i comme des fonctions de t, satisfont aux équations (2).

157. Nous nous proposons de *déterminer à quelles fonctions de* t *il faut égaler les* α_i *pour satisfaire aux équations* (2).

Nous allons d'abord démontrer une formule due à Lagrange et dont nous aurons à faire usage.

Des $2n$ équations (4) :

$$\alpha_i = \varphi(t, q_i, p_i),$$

on tire :

$$\left.\begin{aligned} p_i &= \psi(t, \alpha_i), \\ q_i &= \psi_1(t, \alpha_i). \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Mais, les équations (2) nous donnent :

$$\frac{\partial\Omega}{\partial p_i} = \frac{dq_i}{dt} - \frac{\partial H_1}{\partial p_i}.$$

D'ailleurs, des équations (5) on tire, en considérant les α_i comme des variables, fonctions de t :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial q_i}{\partial t} + \sum \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_k}\frac{d\alpha_k}{dt};$$

par suite,

$$\frac{\partial\Omega}{\partial p_i} = \frac{\partial q_i}{\partial t} + \sum \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_k}\frac{d\alpha_k}{dt} - \frac{\partial H_1}{\partial p_i}.$$

Or, $\frac{\partial q_i}{\partial t}$ est la dérivée de q_i par rapport à t, que l'on obtiendrait en considérant les α_i comme des constantes : c'est donc la dérivée de q_i qui satisfait aux équations (3), et l'on a, par conséquent, en ayant égard à ces équations (3) :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial p_i} = \sum \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_k} \frac{d\alpha_k}{dt};$$

de même,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial q_i} = - \sum \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k} \frac{d\alpha_k}{dt}.$$

D'ailleurs, puisque Ω est une fonction des p_i, q_i, lesquelles sont des fonctions des α_i, on a :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha} = \sum \left(\frac{\partial \Omega}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Omega}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right);$$

d'où, en remplaçant $\frac{\partial \Omega}{\partial p_i}$, $\frac{\partial \Omega}{\partial q_i}$ par leurs valeurs, il vient :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha} = \sum_k \sum_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_k} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right) \frac{d\alpha_k}{dt},$$

et, en posant (n° **110**) :

$$[\alpha_k, \alpha] = \sum_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_k} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right),$$

on a la formule :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha} = \sum_k [\alpha_k, \alpha] \frac{d\alpha_k}{dt}. \tag{6}$$

C'est la *formule de Lagrange :* le signe Σ se rapporte à l'indice k, tandis que α est un élément déterminé.

158. Propriété. — Il est facile de démontrer que l'*expression* $[\alpha_k, \alpha]$ *est une fonction des éléments seulement, c'est-à-dire qu'elle ne renferme pas explicitement le temps.*

On a donc à démontrer que l'on a :

$$\frac{\partial[\alpha_k, \alpha]}{\partial t} = 0.$$

A cet effet, reprenons l'expression :

$$[\alpha_k, \alpha] = \frac{\partial q_1}{\partial \alpha_k}\frac{\partial p_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial q_2}{\partial \alpha_k}\frac{\partial p_2}{\partial \alpha} + \cdots + \frac{\partial q_n}{\partial \alpha_k}\frac{\partial p_n}{\partial \alpha}$$
$$- \left(\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_k}\frac{\partial q_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial p_2}{\partial \alpha_k}\frac{\partial q_2}{\partial \alpha} + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial \alpha_k}\frac{\partial q_n}{\partial \alpha}\right).$$

On a évidemment :

$$[\alpha_k, \alpha] = \frac{\partial\left(p_1\frac{\partial q_1}{\partial \alpha_k} + p_2\frac{\partial q_2}{\partial \alpha_k} + \cdots + p_n\frac{\partial q_n}{\partial \alpha_k}\right)}{\partial \alpha}$$
$$- \frac{\partial\left(p_1\frac{\partial q_1}{\partial \alpha} + p_2\frac{\partial q_2}{\partial \alpha} + \cdots + p_n\frac{\partial q_n}{\partial \alpha}\right)}{\partial \alpha_k};$$

par conséquent,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial[\alpha_k, \alpha]}{\partial t} = & \frac{\partial^2\left(p_1\frac{\partial q_1}{\partial \alpha_k} + p_2\frac{\partial q_2}{\partial \alpha_k} + \cdots + p_n\frac{\partial q_n}{\partial \alpha_k}\right)}{\partial \alpha \partial t} \\ & - \frac{\partial^2\left(p_1\frac{\partial q_1}{\partial \alpha} + p_2\frac{\partial q_2}{\partial \alpha} + \cdots + p_n\frac{\partial q_n}{\partial \alpha}\right)}{\partial \alpha_k \partial t}. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

On a d'ailleurs :

$$\left.\begin{aligned} q'_i = \frac{\partial q_i}{\partial t} = & \frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial p_i}, \\ \frac{\partial p_i}{\partial t} = & -\frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial q_i}; \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

par suite,

$$\frac{\partial\left(p_1\frac{\partial q_1}{\partial\alpha_k}+p_2\frac{\partial q_2}{\partial\alpha_k}+\cdots+p_n\frac{\partial q_n}{\partial\alpha_k}\right)}{\partial t}$$

$$=-\left(\frac{\partial H_1}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial\alpha_k}+\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial\alpha_k}+\cdots+\frac{\partial H_1}{\partial q_n}\frac{\partial q_n}{\partial\alpha_k}\right)$$

$$+\left(p_1\frac{\partial q'_1}{\partial\alpha_k}+p_2\frac{\partial q'_2}{\partial\alpha_k}+\cdots+p_n\frac{\partial q'_n}{\partial\alpha_k}\right)$$

$$=p_1\frac{\partial\frac{\partial H_1}{\partial p_1}}{\partial\alpha_k}+p_2\frac{\partial\frac{\partial H_1}{\partial p_2}}{\partial\alpha_k}+\cdots+p_n\frac{\partial\frac{\partial H_1}{\partial p_n}}{\partial\alpha_k}$$

$$-\left(\frac{\partial H_1}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial\alpha_k}+\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial\alpha_k}+\cdots+\frac{\partial H_1}{\partial q_n}\frac{\partial q_n}{\partial\alpha_k}\right)$$

$$=p_1\frac{\partial\frac{\partial H_1}{\partial p_1}}{\partial\alpha_k}+p_2\frac{\partial\frac{\partial H_1}{\partial p_2}}{\partial\alpha_k}+\cdots+p_n\frac{\partial\frac{\partial H_1}{\partial p_n}}{\partial\alpha_k}$$

$$+\left(\frac{\partial H_1}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial\alpha_k}+\frac{\partial H_1}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial\alpha_k}+\cdots+\frac{\partial H_1}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial\alpha_k}\right)$$

$$-\left(\frac{\partial H_1}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial\alpha_k}+\frac{\partial H_1}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial\alpha_k}+\cdots+\frac{\partial H_1}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial\alpha_k}\right)$$

$$-\left(\frac{\partial H_1}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial\alpha_k}+\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial\alpha_k}+\cdots+\frac{\partial H_1}{\partial q_n}\frac{\partial q_n}{\partial\alpha_k}\right)$$

$$=\frac{\partial\left(p_1\frac{\partial H_1}{\partial p_1}+p_2\frac{\partial H_1}{\partial p_2}+\cdots+p_n\frac{\partial H_1}{\partial p_n}\right)}{\partial\alpha_k}-\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_k}$$

$$=\frac{\partial\left(p_1\frac{\partial H_1}{\partial p_1}+p_2\frac{\partial H_1}{\partial p_2}+\cdots+p_n\frac{\partial H_1}{\partial p_n}-H_1\right)}{\partial\alpha_k}.$$

Si l'on différentie de nouveau par rapport à α, on obtient une expression dans laquelle on peut changer α_k et α l'une dans l'autre. On a donc :

$$\frac{\partial^2\left(p_1\frac{\partial q_1}{\partial\alpha_k}+p_2\frac{\partial q_2}{\partial\alpha_k}+\cdots+p_n\frac{\partial q_n}{\partial\alpha_k}\right)}{\partial\alpha\partial t}$$

$$=\frac{\partial^2\left(p_1\frac{\partial q_1}{\partial\alpha}+p_2\frac{\partial q_2}{\partial\alpha}+\cdots+p_n\frac{\partial q_n}{\partial\alpha}\right)}{\partial\alpha_k\partial t};$$

par suite, le second membre de l'équation (7) est identiquement nul, et l'on a :

$$\frac{\partial[\alpha_k,\alpha]}{\partial t}=0,$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

159. *Remarque I.* — On peut encore démontrer la propriété précédente d'une autre manière. A cet effet, nous ferons usage d'une formule qu'il est facile de vérifier.

Soient p_i, q_i des fonctions des trois variables α, β, t, il est facile de voir que l'on a identiquement :

$$\frac{\partial[\alpha,\beta]}{\partial t}+\frac{\partial[\beta,t]}{\partial\alpha}+\frac{\partial[t,\alpha]}{\partial\beta}=0.$$

Pour appliquer cette formule au cas actuel, supposons que les quantités q_i, p_i soient des fonctions telles que l'on ait :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial q_i}{\partial t}&=\frac{\partial H_1}{\partial p_i},\\ \frac{\partial p_i}{\partial t}&=-\frac{\partial H_1}{\partial q_i},\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

lorsque l'on remplace dans les expressions $\frac{\partial H_1}{\partial q_i}$, $\frac{\partial H_1}{\partial p_i}$ les quantités p et q par leurs valeurs en fonction de α, β, t et des autres éléments.

Cela posé, on a :

$$[\beta, t] = \frac{\partial q_1}{\partial \beta}\frac{\partial p_1}{\partial t} - \frac{\partial q_1}{\partial t}\frac{\partial p_1}{\partial \beta} + \frac{\partial q_2}{\partial \beta}\frac{\partial p_2}{\partial t} - \frac{\partial q_2}{\partial t}\frac{\partial p_2}{\partial \beta} + \dots$$

$$= -\frac{\partial q_1}{\partial \beta}\frac{\partial H_1}{\partial q_1} - \frac{\partial p_1}{\partial \beta}\frac{\partial H_1}{\partial p_1} - \frac{\partial q_2}{\partial \beta}\frac{\partial H_1}{\partial q_2} - \frac{\partial p_2}{\partial \beta}\frac{\partial H_1}{\partial p_2} - \dots$$

$$= -\frac{\partial H_1}{\partial \beta};$$

de même,

$$[t, \alpha] = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha};$$

par conséquent,

$$\frac{\partial[\beta, t]}{\partial \alpha} + \frac{\partial[t, \alpha]}{\partial \beta} = 0.$$

Par suite, en vertu de l'identité précédente, on a :

$$\frac{\partial[\alpha, \beta]}{\partial t} = 0,$$

ce qui est la propriété énoncée.

160. *Remarque II.* — Si α, β, γ sont trois éléments arbitraires, et si l'on remplace t par γ dans l'identité ci-dessus, on a la relation :

$$\frac{\partial[\alpha, \beta]}{\partial \gamma} + \frac{\partial[\beta, \gamma]}{\partial \alpha} + \frac{\partial[\gamma, \alpha]}{\partial \beta} = 0.$$

161. Proposons-nous maintenant de trouver l'expression des $\frac{d\alpha_k}{dt}$, c'est-à-dire les valeurs que l'on obtiendrait en résolvant les équations (6) par rapport aux $\frac{d\alpha_k}{dt}$.

Des équations (4) :

$$\alpha = \varphi(t, q_i, p_i),$$

on tire :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial \alpha}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial \alpha}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}\right),$$

ou bien, en remplaçant $\frac{dq_i}{dt}$, $\frac{dp_i}{dt}$, par leurs valeurs (2) :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \sum \left[\frac{\partial \alpha}{\partial q_i}\frac{\partial(H_1 + \Omega)}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha}{\partial p_i}\frac{\partial(H_1 + \Omega)}{\partial q_i}\right],$$

ou bien encore, d'après la notation de Poisson (n° 69) :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + (\alpha, H_1 + \Omega).$$

Or, si l'on suppose $\Omega = 0$, α est une intégrale des équations (3), et l'on a :

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0,$$

ou bien :

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} + (\alpha, H_1) = 0 \text{ (*)}.$$

Par suite, en soustrayant, il vient :

$$\frac{d\alpha}{dt} = (\alpha, \Omega);$$

en développant le second membre, on a :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sum \left(\frac{\partial\alpha}{\partial q_i} \frac{\partial\Omega}{\partial p_i} - \frac{\partial\alpha}{\partial p_i} \frac{\partial\Omega}{\partial q_i} \right),$$

et, si l'on remplace $\frac{\partial\Omega}{\partial p_i}$, $\frac{\partial\Omega}{\partial q_i}$ par leurs valeurs :

$$\frac{\partial\Omega}{\partial p_i} = \sum \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_k} \frac{\partial\alpha_k}{\partial p_i} \text{ (**)},$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial q_i} = \sum \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_k} \frac{\partial\alpha_k}{\partial q_i},$$

il vient :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sum \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_k} (\alpha, \alpha_k). \tag{8}$$

Cette *formule* est due à *Poisson*. Elle permet de déterminer $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n}$, en fonction de t ; le signe Σ se rapporte à l'indice k.

(*) C'est la formule que nous avons trouvée précédemment (n° 102).

(**) Ω étant considérée comme une fonction des α, lesquelles sont des fonctions des p_i, q_i.

162. Propriété. — Il est facile de s'assurer que *les coefficients (α, α_k) sont de simples fonctions des éléments seulement, c'est-à-dire qu'ils ne renferment pas explicitement le temps.*

On a donc à démontrer que l'on a :

$$\frac{\partial(\alpha, \alpha_k)}{\partial t} = 0.$$

A cet effet, reprenons l'expression :

$$(\alpha, \alpha_k) = \sum \left(\frac{\partial \alpha}{\partial q_i}\frac{\partial \alpha_k}{\partial p_i} - \frac{\partial \alpha}{\partial p_i}\frac{\partial \alpha_k}{\partial q_i}\right),$$

qui nous donne :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial(\alpha, \alpha_k)}{\partial t} &= \sum \left(\frac{\partial \alpha}{\partial q_i}\frac{\partial \dfrac{\partial \alpha_k}{\partial p_i}}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k}{\partial p_i}\frac{\partial \dfrac{\partial \alpha}{\partial q_i}}{\partial t}\right) \\ &- \sum \left(\frac{\partial \alpha}{\partial p_i}\frac{\partial \dfrac{\partial \alpha_k}{\partial q_i}}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_i}\frac{\partial \dfrac{\partial \alpha}{\partial p_i}}{\partial t}\right).\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Or,

$$\frac{\partial \dfrac{\partial \alpha}{\partial q_i}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial q_i \partial t} + \sum_{k'=1}^{k'=n}\left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial q_i \partial q_{k'}}\frac{\partial q_{k'}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial q_i \partial p_{k'}}\frac{\partial p_{k'}}{\partial t}\right);$$

d'ailleurs, les équations (3) du mouvement non troublé nous donnent :

$$\frac{\partial q_{k'}}{\partial t} = \frac{\partial H_1}{\partial p_{k'}},$$

$$\frac{\partial p_{k'}}{\partial t} = -\frac{\partial H_1}{\partial q_{k'}};$$

par conséquent,

$$\frac{\partial \dfrac{\partial \alpha}{\partial q_i}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial q_i \partial t} + \sum_{k'=1}^{k'=n}\left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial q_i \partial q_{k'}}\frac{\partial H_1}{\partial p_{k'}} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial q_i \partial p_{k'}}\frac{\partial H_1}{\partial q_{k'}}\right),$$

de même,

$$\frac{\partial \dfrac{\partial \alpha}{\partial p_i}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial p_i \partial t} + \sum_{k'=1}^{k'=n}\left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial p_i \partial q_{k'}}\frac{\partial H_1}{\partial p_{k'}} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial p_i \partial p_{k'}}\frac{\partial H_1}{\partial q_{k'}}\right).$$

D'autre part, on a :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + (\alpha, \mathrm{H}_1) = 0,$$

ou bien :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \sum_{k'=1}^{k'=n} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial q_{k'}} \frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial p_{k'}} - \frac{\partial \alpha}{\partial p_{k'}} \frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial q_{k'}} \right) = 0.$$

Différentions cette équation successivement par rapport à q_i, p_i, il viendra :

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial q_i \partial t} + \sum_{k'=1}^{k'=n} \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial q_i \partial q_{k'}} \frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial p_{k'}} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial q_i \partial p_{k'}} \frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial q_{k'}} \right)$$
$$+ \sum_{k'=1}^{k'=n} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial q_{k'}} \frac{\partial^2 \mathrm{H}_1}{\partial q_i \partial p_{k'}} - \frac{\partial \alpha}{\partial p_{k'}} \frac{\partial^2 \mathrm{H}_1}{\partial q_i \partial q_{k'}} \right) = 0,$$

et

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial p_i \partial t} + \sum_{k'=1}^{k'=n} \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial p_i \partial q_{k'}} \frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial p_{k'}} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial p_i \partial p_{k'}} \frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial q_{k'}} \right)$$
$$+ \sum_{k'=1}^{k'=n} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial q_{k'}} \frac{\partial^2 \mathrm{H}_1}{\partial p_i \partial p_{k'}} - \frac{\partial \alpha}{\partial p_{k'}} \frac{\partial^2 \mathrm{H}_1}{\partial p_i \partial q_{k'}} \right) = 0.$$

Retranchant ces deux équations respectivement des deux précédentes, on a les deux équations :

$$\frac{\partial \dfrac{\partial \alpha}{\partial q_i}}{\partial t} = \sum_{k'=1}^{k'=n} \left(- \frac{\partial \alpha}{\partial q_{k'}} \frac{\partial^2 \mathrm{H}_1}{\partial q_i \partial p_{k'}} + \frac{\partial \alpha}{\partial p_{k'}} \frac{\partial^2 \mathrm{H}_1}{\partial q_i \partial q_{k'}} \right),$$

$$\frac{\partial \dfrac{\partial \alpha}{\partial p_i}}{\partial t} = \sum_{k'=1}^{k'=n} \left(- \frac{\partial \alpha}{\partial q_{k'}} \frac{\partial^2 \mathrm{H}_1}{\partial p_i \partial p_{k'}} + \frac{\partial \alpha}{\partial p_{k'}} \frac{\partial^2 \mathrm{H}_1}{\partial p_i \partial q_{k'}} \right).$$

Multiplions la première par $\frac{\partial \alpha_k}{\partial p_i}$, la seconde par $\frac{\partial \alpha_k}{\partial q_i}$, et retranchons, puis faisons la somme par rapport à l'indice i. Nous aurons ainsi la valeur de l'expression :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial \alpha_k}{\partial p_i} \frac{\partial \dfrac{\partial \alpha}{\partial q_i}}{\partial t} - \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_i} \frac{\partial \dfrac{\partial \alpha}{\partial p_i}}{\partial t} \right).$$

Or, il est évident, puisque les indices i et k' doivent recevoir toutes les valeurs 1, 2, ... n, que l'on obtiendra la même valeur pour l'expression :

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial\frac{\partial\alpha_k}{\partial q_i}}{\partial t}-\frac{\partial\alpha}{\partial q_i}\frac{\partial\frac{\partial\alpha_k}{\partial p_i}}{\partial t}\right).$$

Par conséquent, le second membre de l'équation (9) est identiquement nul, et l'on a :

$$\frac{\partial(\alpha,\alpha_k)}{\partial t}=0,$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

163. *Remarque I.* — Cette propriété résulte d'ailleurs de ce que les équations (8) peuvent être obtenues par la résolution des équations (6). Il est évident que si les coefficients $[\alpha, \alpha_k]$ ne renferment pas explicitement le temps, il en sera de même des coefficients (α, α_k).

164. *Remarque II.* — Remarquons aussi que les formules perturbatrices de Lagrange et de Poisson (6) et (8) ne changent pas, si la fonction H_1, outre les q_i, p_i, renferme explicitement le temps. Dans ce cas encore, les expressions $[\alpha, \alpha_k]$ et (α, α_k) sont des fonctions des éléments seulement.

165. Si le système est tout à fait libre, et si l'on prend pour les variables q_i les coordonnées rectangulaires elles-mêmes, alors les q_i sont les x_i, y_i, z_i et les p_i sont égaux à $m_ix'_i$, $m_iy'_i$, $m_iz'_i$.

Il est évident que, dans ce cas, les expressions :

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial p_i \partial p_k},$$

sont nulles ; les expressions :

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial p_i \partial p'_k},$$

sont aussi nulles, excepté pour $k' = i$: dans ce dernier cas, ces dernières se réduisent à $\frac{1}{m_i}$. Mais alors la formule :

$$\frac{\partial \frac{\partial \alpha}{\partial p_i}}{\partial t} = \sum_{k'=1}^{k'=n} \left(- \frac{\partial \alpha}{\partial q_{k'}} \frac{\partial^2 H_1}{\partial p_i \partial p_{k'}} + \frac{\partial \alpha}{\partial p_{k'}} \frac{\partial^2 H_1}{\partial p_i \partial q_{k'}} \right),$$

nous donne :

$$\frac{\partial \frac{\partial \alpha}{\partial x'_i}}{\partial t} = - \frac{\partial \alpha}{\partial x_i};$$

de même,

$$\frac{\partial \frac{\partial \alpha}{\partial y'_i}}{\partial t} = - \frac{\partial \alpha}{\partial y_i},$$

$$\frac{\partial \frac{\partial \alpha}{\partial z'_i}}{\partial t} = - \frac{\partial \alpha}{\partial z_i}.$$

Ces trois dernières formules ont été trouvées par Lagrange. On en déduit que, si une intégrale (c'est-à-dire une fonction de t et des $6n$ quantités x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i, égalée à une constante arbitraire, sans que cette expression contienne d'autres constantes arbitraires) renferme une coordonnée, elle devra aussi renfermer le quotient différentiel de cette coordonnée par rapport au temps (*).

Réciproquement, si la dérivée d'une coordonnée par rapport au temps n'entre pas dans l'intégrale, ou y entre seulement au premier degré, multipliée par une constante, la coordonnée correspondante n'entrera pas dans l'intégrale.

En effet, si α ne contient pas x', on a :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x'} = 0,$$

(*) Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*, p. 425.

et si α contient x' au premier degré, multipliée par une constante, on a :

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x'} = const.;$$

donc, dans les deux cas,

$$\frac{\partial \frac{\partial\alpha}{\partial x'}}{\partial t} = 0;$$

par suite,

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} = 0,$$

et, par conséquent, α ne contient pas la coordonnée x.

166. Observons encore que, si le théorème des forces vives est applicable, $\frac{\partial\alpha}{\partial t}$ sera toujours une simple fonction des éléments seulement. En effet, dans ce cas, la solution du problème se compose de $2n - 1$ équations avec $2n - 1$ constantes arbitraires entre les $2n$ quantités q_i, p_i, ne renfermant pas le temps t, et une $2n^e$ équation qui donne $t + \tau$ exprimé en fonction des q_i, p_i, la quantité τ étant la $2n^e$ constante arbitraire.

Si donc α est une des $2n - 1$ premières constantes arbitraires, on aura :

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} = 0.$$

Si $\alpha = \tau$, on a :

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} = -1;$$

en effet, de l'équation :

$$t + \tau = f(q_i, p_i),$$

on déduit :

$$1 + \frac{\partial\tau}{\partial t} = 0;$$

par conséquent,

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} = \frac{\partial\tau}{\partial t} = -1$$

XXIII.

Formules de perturbations.

167. Nous avons vu (nos **158** et **162**) que les expressions $[\alpha, \beta]$ et (α, β) ne renferment pas explicitement le temps. Il s'ensuit qu'elles ne changent pas, lorsque l'on y fait $t = 0$, et que l'on remplace les variables p_i, q_i par leurs valeurs pour $t = 0$.

Si donc on désigne par c_i, b_i, les valeurs de q_i, p_i, pour $t = 0$, on aura :

$$\left.\begin{aligned} [\alpha, \beta] = {} & \frac{\partial c_1}{\partial \alpha}\frac{\partial b_1}{\partial \beta} + \frac{\partial c_2}{\partial \alpha}\frac{\partial b_2}{\partial \beta} + \cdots + \frac{\partial c_n}{\partial \alpha}\frac{\partial b_n}{\partial \beta} \\ & - \left(\frac{\partial c_1}{\partial \beta}\frac{\partial b_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial c_2}{\partial \beta}\frac{\partial b_2}{\partial \alpha} + \cdots + \frac{\partial c_n}{\partial \beta}\frac{\partial b_n}{\partial \alpha}\right), \\ (\alpha, \beta) = {} & \frac{\partial \alpha}{\partial c_1}\frac{\partial \beta}{\partial b_1} + \frac{\partial \alpha}{\partial c_2}\frac{\partial \beta}{\partial b_2} + \cdots + \frac{\partial \alpha}{\partial c_n}\frac{\partial \beta}{\partial b_n} \\ & - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial b_1}\frac{\partial \beta}{\partial c_1} + \frac{\partial \alpha}{\partial b_2}\frac{\partial \beta}{\partial c_2} + \cdots + \frac{\partial \alpha}{\partial b_n}\frac{\partial \beta}{\partial c_n}\right). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Il résulte de ces deux dernières formules que, si l'on prend pour éléments α, β, les quantités c_i, b_i elles-mêmes, on aura, pour i et k différents :

$$[c_i, b_k] = 0, \quad (c_i, b_k) = 0;$$

tandis que, pour $k = i$, on a :

$$[c_i, b_i] = -[b_i, c_i] = 1,$$

$$(c_i, b_i) = -(b_i, c_i) = 1$$

Dans ce cas, chacune des formules (6) et (8) (nos **157** et **161**),

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \beta} = \sum [\alpha, \beta] \frac{d\alpha}{dt},$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sum (\alpha, \beta) \frac{\partial \Omega}{\partial \beta},$$

nous donne les équations suivantes :

$$\left.\begin{array}{ll}\frac{dc_1}{dt}=\frac{\partial\Omega}{\partial b_1}, & \frac{db_1}{dt}=-\frac{\partial\Omega}{\partial c_1},\\ \frac{dc_2}{dt}=\frac{\partial\Omega}{\partial b_2}, & \frac{db_2}{dt}=-\frac{\partial\Omega}{\partial c_2},\\ \ldots & \ldots\\ \frac{dc_n}{dt}=\frac{\partial\Omega}{\partial b_n}, & \frac{db_n}{dt}=-\frac{\partial\Omega}{\partial c_n}.\end{array}\right\} \quad (2)$$

Ces équations (2) forment un système analogue au système canonique.

168. *Remarque I.* — Si dans les formules (1), on fait $\beta = b_i$, il vient :

$$[\alpha, b_i] = \frac{\partial c_i}{\partial \alpha}, \quad (\alpha, b_i) = \frac{\partial \alpha}{\partial c_i};$$

si l'on y fait $\beta = c_i$, on a :

$$[\alpha, c_i] = -\frac{\partial b_i}{\partial \alpha}, \quad (\alpha, c_i) = -\frac{\partial \alpha}{\partial b_i}.$$

169. *Remarque II.* — Si l'on prend pour les q_i les coordonnées rectangulaires, et si l'on désigne par a_i, b_i, c_i, a'_i, b'_i, c'_i les valeurs initiales de x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i, les équations précédentes nous donnent :

$$m_i\frac{da_i}{dt}=\frac{\partial\Omega}{\partial a'_i}, \quad m_i\frac{da'_i}{dt}=-\frac{\partial\Omega}{\partial a_i},$$

$$m_i\frac{db_i}{dt}=\frac{\partial\Omega}{\partial b'_i}, \quad m_i\frac{db'_i}{dt}=-\frac{\partial\Omega}{\partial b_i},$$

$$m_i\frac{dc_i}{dt}=\frac{\partial\Omega}{\partial c'_i}, \quad m_i\frac{dc'_i}{dt}=-\frac{\partial\Omega}{\partial c_i}.$$

Ces formules ont lieu même dans le cas où la fonction Ω renferme les p_i, c'est-à-dire les x'_i, y'_i, z'_i.

170. La théorie que nous venons d'exposer nous permet

d'obtenir les éléments en fonction du temps de la manière suivante :

Exprimons Ω, *au moyen des formules du mouvement non troublé, en fonction des éléments* $b_1, \ldots b_n, c_1, \ldots c_n$; *remplaçons ensuite les quantités* $b_1, b_2, \ldots b_n$ *par les expressions :*

$$\frac{\partial W}{\partial c_1}, \frac{\partial W}{\partial c_2}, \ldots \frac{\partial W}{\partial c_n},$$

et formons l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \Omega = 0.$$

Si W *est une solution complète de cette équation, renfermant, outre la constante additive,* n *constantes arbitraires* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, *les équations :*

$$\frac{\partial W}{\partial c_1} = b_1, \ldots \frac{\partial W}{\partial c_n} = b_n,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \ldots \frac{\partial W}{\partial \alpha_n} = \beta_n,$$

dans lesquelles $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ *sont de nouvelles constantes arbitraires, sont les intégrales qui détermineront les éléments variables.*

171. Nous avons vu (n° **167**) que, si l'on choisit comme éléments les valeurs initiales des quantités q_i, p_i, les équations différentielles qui déterminent ces éléments prennent, dans tous les problèmes de mécanique auxquels le principe des forces vives est applicable, une forme simple analogue aux équations canoniques.

Or, les valeurs initiales des p_i, q_i ne forment pas le seul système d'éléments dont les équations différentielles ont la forme canonique. Nous nous proposons de voir comment l'on pourra trouver les différents systèmes d'éléments pour tout problème de mécanique auquel le principe des forces vives est applicable.

Cette question se résout par le théorème suivant, qui est de la plus grande importance dans la théorie de la variation des constantes arbitraires.

172. Théorème. — *Soit* H_1 *une fonction de* t *et des quantités* q_i, p_i, *et soient :*

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial p_i},$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial q_i},$$

les équations différentielles du problème non troublé, desquelles on déduit les équations différentielles du problème troublé, en remplaçant H_1 *par* $H_1 + \Omega$, Ω *étant une fonction quelconque des* 2n *quantités* q_i, p_i, *et de* t.

Soit W *une solution complète de l'équation :*

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H_1 = 0,$$

dans laquelle les p_i *qui entrent dans* H_1, *ont été remplacés par* $\frac{\partial W}{\partial q_i}$.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, *les* n *constantes arbitraires qui, outre la constante additive, sont contenues dans* W, *et soient :*

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1,\ \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2,\ \ldots\ \frac{\partial W}{\partial \alpha_n} = \beta_n,$$

les intégrales du problème non troublé, $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ *étant de nouvelles constantes arbitraires.*

Si, au moyen de ces équations et des équations :

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1,\ \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2,\ \ldots\ \frac{\partial W}{\partial q_n} = p_n,$$

on exprime la fonction perturbatrice Ω *en fonction de* t, *et des éléments* α_i, β_i, *et si l'on considère dans le problème troublé ces*

éléments comme variables, on a, pour déterminer ces éléments les équations différentielles :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\alpha_1}{dt} &= -\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_1}, & \frac{d\beta_1}{dt} &= \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_1},\\
\frac{d\alpha_2}{dt} &= -\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_2}, & \frac{d\beta_2}{dt} &= \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_2},\\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots\\
\frac{d\alpha_n}{dt} &= -\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_n}, & \frac{d\beta_n}{dt} &= \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_n}.
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Dans les formules précédentes (n° **167**) les constantes α des intégrales du problème non troublé étaient les valeurs initiales des q_i, et les constantes β étaient les valeurs initiales des p_i changées de signe. Dans ce cas, le théorème que nous venons d'énoncer donne les formules (2) que nous avons obtenues (n° **167**), et dans lesquelles les valeurs initiales c_i, b_i des q_i et p_i, sont considérées comme les éléments troublés.

Pour démontrer le théorème actuel, nous conviendrons de renfermer entre parenthèses les dérivées partielles de W considérée comme fonction de t et des $2n$ constantes α, β, et d'écrire ces dérivées sans parenthèses, lorsque W est considérée comme une fonction de t, des n quantités q_i et des n quantités α_i.

On a donc, d'après cela :

$$\left(\frac{\partial W}{\partial\alpha_k}\right) = \frac{\partial W}{\partial\alpha_k} + \frac{\partial W}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial\alpha_k} + \cdots + \frac{\partial W}{\partial q_n}\frac{\partial q_n}{\partial\alpha_k},$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial\beta_k}\right) = \frac{\partial W}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial\beta_k} + \cdots + \frac{\partial W}{\partial q_n}\frac{\partial q_n}{\partial\beta_k},$$

ou bien, en vertu des intégrales du problème non troublé, qui ont aussi lieu sans altération pour le problème troublé, avec cette différence que les éléments y sont considérés comme variables,

$$\left(\frac{\partial W}{\partial\alpha_k}\right) = \beta_k + p_1\frac{\partial q_1}{\partial\alpha_k} + p_2\frac{\partial q_2}{\partial\alpha_k} + \cdots + p_n\frac{\partial q_n}{\partial\alpha_k},$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial\beta_k}\right) = p_1\frac{\partial q_1}{\partial\beta_k} + p_2\frac{\partial q_2}{\partial\beta_k} + \cdots + p_n\frac{\partial q_n}{\partial\beta_k}.$$

Or, si α, β désignent deux quelconques des $2n$ constantes arbitraires, on a :

$$[\alpha, \beta] = \frac{\partial q_1}{\partial \alpha}\frac{\partial p_1}{\partial \beta} + \frac{\partial q_2}{\partial \alpha}\frac{\partial p_2}{\partial \beta} + \cdots + \frac{\partial q_n}{\partial \alpha}\frac{\partial p_n}{\partial \beta}$$
$$- \left(\frac{\partial p_1}{\partial \alpha}\frac{\partial q_1}{\partial \beta} + \frac{\partial p_2}{\partial \alpha}\frac{\partial q_2}{\partial \beta} + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial \alpha}\frac{\partial q_n}{\partial \beta}\right)$$
$$= \frac{\partial\left(p_1 \frac{\partial q_1}{\partial \alpha} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial \alpha} + \cdots + p_n \frac{\partial q_n}{\partial \alpha}\right)}{\partial \beta}$$
$$- \frac{\partial\left(p_1 \frac{\partial q_1}{\partial \beta} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial \beta} + \cdots + p_n \frac{\partial q_n}{\partial \beta}\right)}{\partial \alpha}.$$

Faisons maintenant les trois hypothèses :

$$\alpha = \alpha_i, \qquad \beta = \alpha_k,$$
$$\alpha = \alpha_i, \qquad \beta = \beta_k,$$
$$\alpha = \beta_i, \qquad \beta = \beta_k,$$

les éléments α_i, β_i ayant la signification indiquée dans l'énoncé du théorème.

Nous aurons, en observant que les termes provenant de la différentiation double de W, se détruisent :

$$[\alpha_i, \alpha_k] = 0, \quad [\beta_i, \beta_k] = 0, \quad [\alpha_i, \beta_k] = 0;$$

mais, pour $k = i$, on a :

$$[\alpha_i, \beta_i] = -[\beta_i, \alpha_i] = -1.$$

Par conséquent, pour $\beta = \alpha_i$, l'expression $[\alpha, \beta]$ est nulle, excepté dans le cas où $\alpha = \beta_i$, et alors elle est égale à l'unité :

$$[\beta_i, \alpha_i] = 1.$$

D'autre part, pour $\beta = \beta_i$, l'expression $[\alpha, \beta]$ est nulle, excepté pour $\alpha = \alpha_i$, et alors elle est égale à -1 :

$$[\alpha_i, \beta_i] = -1.$$

La formule de Lagrange (n° **157**) :

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}=\sum[\alpha,\beta]\frac{d\alpha}{dt},$$

nous donnera, en remplaçant successivement α par les $2n$ éléments, les $2n$ équations différentielles :

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_i}&=\frac{d\beta_i}{dt},\\ \frac{\partial\Omega}{\partial\beta_i}&=-\frac{d\alpha_i}{dt},\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

et le théorème est démontré.

173. *Remarque.* — D'après la formule de Poisson (n° **161**), on a :

$$\frac{d\alpha}{dt}=\sum(\alpha,\beta)\frac{\partial\Omega}{\partial\beta};$$

par conséquent, si l'on remplace sous le signe Σ successivement β par les $2n$ éléments, il résulte des équations précédentes (3) que, si l'on prend pour les éléments les constantes arbitraires α_i, β_i du théorème ci-dessus (n° **172**), on aura les équations identiques :

$$(\alpha_i,\alpha_k)=0,\quad(\beta_i,\beta_k)=0,\quad(\alpha_i,\beta_k)=0,$$

tandis que, pour $k=i$, on a :

$$(\alpha_i,\beta_i)=-(\beta_i,\alpha_i)=-1.$$

Les formules que nous venons de trouver sont d'une grande importance dans la théorie de la *variation des constantes arbitraires*, et dans l'intégration des équations différentielles du problème troublé.

Tout système analogue d'éléments s'appelle *système canonique.*

174. Propriétés. — Les fonctions de Poisson (a_i, a_k) dans lesquelles a_i, a_k sont deux éléments ou deux constantes arbitraires, jouissent encore de plusieurs propriétés remarquables.

1° Elles sont indépendantes du choix des variables q, c'est-à-dire qu'elles restent invariables, quelles que soient les positions des points matériels que l'on prend pour les variables q, pourvu que la signification des éléments n'en soit pas changée;

2° Elles dépendent simplement des deux éléments a_i, a_k, de sorte que la valeur de l'expression (a_i, a_k) reste la même, quelles que soient les constantes arbitraires choisies pour les autres éléments.

Pour démontrer la première propriété, remarquons que, d'après la formule de Poisson (n° **161**), les quotients différentiels des éléments variables sont égaux à des fonctions linéaires des dérivées partielles de la fonction perturbatrice Ω, prises par rapport à ces éléments, et la fonction (a_i, a_k) est le coefficient de $\frac{\partial\Omega}{\partial a_k}$ dans l'expression de $\frac{da_i}{dt}$. Pour former ces dérivées, on doit exprimer Ω en fonction des éléments et de t, et l'expression ainsi obtenue est complètement indépendante des fonctions des coordonnées des points du système que l'on a choisies pour les variables q.

La fonction Ω peut être une fonction arbitraire de t et des $2n$ quantités q_i, p_i, laquelle peut, d'après cela, être une fonction arbitraire de t et des $2n$ éléments.

Les fonctions (a_i, a_k) sont enfin tout à fait indépendantes de la fonction perturbatrice Ω, et sont simplement déterminées par les formules du mouvement non troublé.

Supposons que, par un choix des variables q_i on ait trouvé :

$$\frac{da_i}{dt} = A_1\frac{\partial\Omega}{\partial a_1} + A_2\frac{\partial\Omega}{\partial a_2} + \cdots + A_{2n}\frac{\partial\Omega}{\partial a_{2n}},$$

et que, par un autre choix, on ait :

$$\frac{da_i}{dt} = B_1\frac{\partial\Omega}{\partial a_1} + B_2\frac{\partial\Omega}{\partial a_2} + \cdots + B_{2n}\frac{\partial\Omega}{\partial a_{2n}},$$

on en déduira :

$$(A_1 - B_1)\frac{\partial\Omega}{\partial a_1} + (A_2 - B_2)\frac{\partial\Omega}{\partial a_2} + \cdots + (A_{2n} - B_{2n})\frac{\partial\Omega}{\partial a_{2n}} = 0,$$

A_1, B_1, ... A_{2n}, B_{2n} étant des fonctions de t et des éléments a_1, a_2, ... a_{2n}.

Comme, dans cette dernière équation, Ω peut être une fonction *quelconque* de ces mêmes quantités, on doit avoir :

$$A_1 = B_1, \quad A_2 = B_2, \quad \ldots A_{2n} = B_{2n}. \tag{4}$$

Comme les A_i, B_i sont déterminés uniquement par les formules du mouvement non troublé, et que ces formules du mouvement non troublé n'établissent aucune relation entre a_1, a_2, ... a_{2n} et t, c'est-à-dire entre les constantes arbitraires et le temps t, il s'ensuit que les équations précédentes (4) doivent être des identités; et, par suite, les coefficients A_i sont indépendants du choix des variables q_i.

Il est bon d'observer que, dans la démonstration précédente, nous n'avons pas eu à faire usage de la propriété que les coefficients A_i sont indépendants du temps.

La seconde propriété des fonctions (a_i, a_k) résulte immédiatement de la formule :

$$(a_i, a_k) = \frac{\partial a_i}{\partial q_1}\frac{\partial a_k}{\partial p_1} + \frac{\partial a_i}{\partial q_2}\frac{\partial a_k}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial a_i}{\partial q_n}\frac{\partial a_k}{\partial p_n}$$
$$- \left(\frac{\partial a_i}{\partial p_1}\frac{\partial a_k}{\partial q_1} + \frac{\partial a_i}{\partial p_2}\frac{\partial a_k}{\partial q_2} + \cdots + \frac{\partial a_i}{\partial p_n}\frac{\partial a_k}{\partial q_n}\right).$$

Cette formule nous apprend que pour obtenir (a_i, a_k), il suffit de connaître les expressions de a_i, a_k en fonction de t, q_i, p_i, par conséquent, de connaître seulement deux intégrales du mouvement non troublé. On n'a donc pas besoin de connaître quelles sont les constantes arbitraires, ou les combinaisons de ces constantes que l'on choisit pour les autres éléments, c'est-

à-dire quelles sont les fonctions de t, q_i, p_i, qui, égalées à des constantes arbitraires, en vertu des intégrales du problème non troublé, sont prises pour les $2n - 2$ autres des quantités $a_1, a_2, \ldots a_{2n}$. Il n'est pas nécessaire non plus d'avoir trouvé les autres intégrales du problème non troublé pour obtenir la valeur de (a_i, a_k). Mais, si l'on veut exprimer (a_i, a_k) en fonction des constantes arbitraires seulement, il faudra connaître les autres intégrales.

175. Les fonctions de Lagrange $[a_i, a_k]$ jouissent aussi de la première propriété que nous avons démontrée pour les fonctions de Poisson, c'est-à-dire *qu'elles ne changent pas de valeur quelles que soient les fonctions des coordonnées que l'on prend pour les variables indépendantes* $q_1, q_2, \ldots q_n$.

Cela résulte évidemment de ce que les formules de perturbations de Lagrange et de Poisson peuvent être déduites les unes des autres par la résolution de $2n$ équations linéaires. Les fonctions $[a_i, a_k]$ et (a_i, a_k) peuvent donc être exprimées les unes en fonction des autres; par conséquent, si les valeurs des unes sont indépendantes du choix des variables q_i, il en sera de même des autres.

Remarque. — On pourrait d'ailleurs démontrer directement cette propriété en raisonnant comme nous l'avons fait pour les fonctions (a_i, a_k) de Poisson (n° **174**).

176. Propriété. — *Les quotients différentiels partiels de la fonction perturbatrice satisfaisant aux formules de Lagrange, ne peuvent être exprimés que d'une seule manière en fonction linéaire des quotients différentiels des constantes, par des équations dont les coefficients sont indépendants du temps.*

Supposons que les quotients différentiels du premier ordre des q_i restent invariables, soit que l'on considère dans leurs expressions en fonction des éléments et du temps, les éléments comme constants ou comme variables.

Nous aurons donc entre les éléments et le temps les n équations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial q_1}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial q_1}{\partial a_2} da_2 + \cdots + \frac{\partial q_1}{\partial a_{2n}} da_{2n} = 0,\\ \frac{\partial q_2}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial q_2}{\partial a_2} da_2 + \cdots + \frac{\partial q_2}{\partial a_{2n}} da_{2n} = 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{\partial q_n}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial q_n}{\partial a_2} da_2 + \cdots + \frac{\partial q_n}{\partial a_{2n}} da_{2n} = 0.\end{array}\right\} \quad (5)$$

Or, en ayant égard à ces équations, on peut démontrer que l'on ne peut avoir deux équations :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial a_i} = C_1 \frac{da_1}{dt} + C_2 \frac{da_2}{dt} + \cdots + C_{2n} \frac{da_{2n}}{dt},$$

et

$$\frac{\partial \Omega}{\partial a_i} = D_1 \frac{da_1}{dt} + D_2 \frac{da_2}{dt} + \cdots + D_{2n} \frac{da_{2n}}{dt},$$

dans lesquelles les D_i soient différents des C_i, si l'on ajoute la condition que les C_i et les D_i doivent être simplement des fonctions des éléments $a_1, a_2, \ldots a_{2n}$, ne renfermant pas le temps, propriété qui a été démontrée (n° **158**) pour les $[a_i, a_k]$.

Si nous posons :

$$C_1 - D_1 = E_1, \quad C_2 - D_2 = E_2, \quad \ldots C_{2n} - D_{2n} = E_{2n},$$

nous aurons à démontrer que des n équations différentielles (5), on ne peut pas tirer une équation différentielle :

$$E_1 da_1 + E_2 da_2 + \cdots E_{2n} da_{2n} = 0, \qquad (6)$$

dans laquelle les coefficients E_i ne renferment pas le temps t, mais sont des fonctions de $a_1, a_2, \ldots a_{2n}$ seulement.

Or, en général, on obtient une équation de la forme (6), au moyen des n équations différentielles (5), en multipliant ces équations respectivement par n facteurs $N_1, N_2, \ldots N_n$, qui

peuvent être des fonctions quelconques de a_1, a_2, ... a_n, t, et ajoutant.

On a alors :

$$E_1 = N_1 \frac{\partial q_1}{\partial a_1} + N_2 \frac{\partial q_2}{\partial a_1} + \cdots + N_n \frac{\partial q_n}{\partial a_1},$$

$$E_2 = N_1 \frac{\partial q_1}{\partial a_2} + N_2 \frac{\partial q_2}{\partial a_2} + \cdots + N_n \frac{\partial q_n}{\partial a_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$E_{2n} = N_1 \frac{\partial q_1}{\partial a_{2n}} + N_2 \frac{\partial q_2}{\partial a_{2n}} + \cdots + N_n \frac{\partial q_n}{\partial a_{2n}}.$$

Pour que les seconds membres de ces équations ne contiennent pas le temps t, on doit avoir les $2n$ équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
0 &= N_1' \frac{\partial q_1}{\partial a_1} + N_2' \frac{\partial q_2}{\partial a_1} + \cdots + N_n' \frac{\partial q_n}{\partial a_1} \\
&\quad + N_1 \frac{\partial q_1'}{\partial a_1} + N_2 \frac{\partial q_2'}{\partial a_1} + \cdots + N_n \frac{\partial q_n'}{\partial a_1}, \\
0 &= N_1' \frac{\partial q_1}{\partial a_2} + N_2' \frac{\partial q_2}{\partial a_2} + \cdots + N_n' \frac{\partial q_n}{\partial a_2} \\
&\quad + N_1 \frac{\partial q_1'}{\partial a_2} + N_2 \frac{\partial q_2'}{\partial a_2} + \cdots + N_n \frac{\partial q_n'}{\partial a_2}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 &= N_1' \frac{\partial q_1}{\partial a_{2n}} + N_2' \frac{\partial q_2}{\partial a_{2n}} + \cdots + N_n' \frac{\partial q_n}{\partial a_{2n}} \\
&\quad + N_1 \frac{\partial q_1'}{\partial a_{2n}} + N_2 \frac{\partial q_2'}{\partial a_{2n}} + \cdots + N_n \frac{\partial q_n'}{\partial a_{2n}},
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

dans lesquelles nous avons posé :

$$q_1' = \frac{\partial q_1}{\partial t}, \quad q_2' = \frac{\partial q_2}{\partial t}, \quad \ldots q_n' = \frac{\partial q_n}{\partial t},$$

$$N_1' = \frac{\partial N_1}{\partial t}, \quad N_2' = \frac{\partial N_2}{\partial t}, \quad \ldots N_n' = \frac{\partial N_n}{\partial t}.$$

Mais, des $2n$ équations (7) on peut éliminer les $2n$ facteurs N_1, N_1', N_2, N_2', ... N_n, N_n', et l'on obtient une équation différen-

tielle entre les quotients différentiels partiels de $q_1, q_2, \dots q_n$, $q'_1, q'_2, \dots q'_n$ par rapport à $a_1, a_2, \dots a_{2n}$. Cette équation dont le premier membre est un déterminant fonctionnel nous apprend (n° **50**) que, entre les quantités $q_1, q_2, \dots q_n, q'_1, q'_2, \dots q'_n$, il existe une relation indépendante des $a_1, a_2, \dots a_{2n}$, mais qui peut cependant renfermer la quantité t.

Si l'on remplace $q'_1, q'_2, \dots q'_n$ par leurs valeurs (3) (n° **156**) :

$$q'_1 = \frac{\partial H_1}{\partial p_1}, \quad \dots q'_n = \frac{\partial H_1}{\partial p_n},$$

on obtient une équation entre les quantités q_i, p_i et t, sans constante arbitraire, laquelle équation résulterait des intégrales complètes du problème non troublé. Mais cela est impossible : car, on ne pourrait obtenir une telle équation au moyen des équations différentielles du problème non troublé, que par une intégration, et cette intégration devrait introduire une constante arbitraire.

Remarque. — Si, considérant les a_i comme variables, l'on pose les fonctions $q_1, q_2, \dots q_n$ égales à des constantes arbitraires, et si l'on suppose en outre que t est aussi une constante arbitraire, on conclut de ce qui précède le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soient* 2n *variables* $a_1, a_2, \dots a_{2n}$, *et soit l'équation différentielle :*

$$E_1 da_1 + E_2 da_2 + \dots + E_{2n} da_{2n} = 0;$$

supposons cette équation intégrée par un système de n *équations :*

$$q_1 = c_1, \quad q_2 = c_2, \quad \dots q_n = c_n,$$

dans lesquelles $c_1, c_2, \dots c_n$ *sont des constantes arbitraires qui n'entrent pas dans les fonctions* $q_1, q_2, \dots q_n$.

Si ces fonctions renferment une constante arbitraire t, *tout à fait indépendante de* $c_1, c_2, \dots c_n$, *il doit exister une relation entre les* 2n *quantités :*

$$q_1, \quad q_2, \quad \dots q_n, \quad \frac{\partial q_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial q_2}{\partial t}, \quad \dots \frac{\partial q_n}{\partial t}.$$

177. PROPRIÉTÉ. — *Les quotients différentiels des constantes dans les formules de perturbations de Poisson, ne peuvent être exprimés que d'une seule manière par une fonction linéaire des dérivées partielles de la fonction perturbatrice Ω, dont les coefficients sont indépendants du temps.*

Nous allons démontrer que, même dans le cas ordinaire, où la fonction Ω ne renferme pas les p_i, on ne peut pas obtenir les deux équations :

$$\frac{da_i}{dt} = A_1 \frac{\partial \Omega}{\partial a_1} + A_2 \frac{\partial \Omega}{\partial a_2} + \cdots + A_{2n} \frac{\partial \Omega}{\partial a_{2n}},$$

$$\frac{da_i}{dt} = B_1 \frac{\partial \Omega}{\partial a_1} + B_2 \frac{\partial \Omega}{\partial a_2} + \cdots + B_{2n} \frac{\partial \Omega}{\partial a_{2n}},$$

dans lesquelles les A_i, B_i sont différents, si l'on ajoute la condition que les coefficients soient simplement des fonctions des a_i, ne renfermant pas t.

Puisque Ω peut être une fonction quelconque de $a_1, a_2, \ldots a_{2n}, t$, telle que, par la substitution des expressions de $a_1, a_2, \ldots a_{2n}$, en fonction de $q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n, t$, les p_i disparaissent d'elles-mêmes, on peut considérer Ω comme une fonction de $a_1, a_2, \ldots a_{2n}, t$ satisfaisant aux équations :

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial \Omega}{\partial a_1}\dfrac{\partial a_1}{\partial p_1} + \dfrac{\partial \Omega}{\partial a_2}\dfrac{\partial a_2}{\partial p_1} + \cdots + \dfrac{\partial \Omega}{\partial a_{2n}}\dfrac{\partial a_{2n}}{\partial p_1} = 0, \\
\dfrac{\partial \Omega}{\partial a_1}\dfrac{\partial a_1}{\partial p_2} + \dfrac{\partial \Omega}{\partial a_2}\dfrac{\partial a_2}{\partial p_2} + \cdots + \dfrac{\partial \Omega}{\partial a_{2n}}\dfrac{\partial a_{2n}}{\partial p_2} = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dfrac{\partial \Omega}{\partial a_1}\dfrac{\partial a_1}{\partial p_n} + \dfrac{\partial \Omega}{\partial a_2}\dfrac{\partial a_2}{\partial p_n} + \cdots + \dfrac{\partial \Omega}{\partial a_{2n}}\dfrac{\partial a_{2n}}{\partial p_n} = 0.
\end{array}\right\} \quad (8)$$

Si l'on pose :

$$A_1 - B_1 = F_1, \quad A_2 - B_2 = F_2, \quad \ldots A_{2n} - B_{2n} = F_{2n},$$

nous aurons à démontrer que des n équations différentielles (8), on ne peut pas tirer une équation différentielle :

$$F_1 \frac{\partial \Omega}{\partial a_1} + F_2 \frac{\partial \Omega}{\partial a_2} + \cdots + F_{2n} \frac{\partial \Omega}{\partial a_{2n}} = 0, \qquad (9)$$

dans laquelle les F_i soient simplement des fonctions des a_i, ne renfermant pas t.

Or, on obtient une équation de la forme (9), au moyen des équations (8), en multipliant ces dernières par des multiplicateurs $k_1, k_2, \ldots k_n$, qui peuvent être des fonctions des a_i et de t, et ajoutant. Nous aurons ainsi les $2n$ équations :

$$\left.\begin{array}{l}
F_1 = k_1 \dfrac{\partial a_1}{\partial p_1} + k_2 \dfrac{\partial a_1}{\partial p_2} + \cdots + k_n \dfrac{\partial a_1}{\partial p_n}, \\
F_2 = k_1 \dfrac{\partial a_2}{\partial p_1} + k_2 \dfrac{\partial a_2}{\partial p_2} + \cdots + k_n \dfrac{\partial a_2}{\partial p_n}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
F_{2n} = k_1 \dfrac{\partial a_{2n}}{\partial p_1} + k_2 \dfrac{\partial a_{2n}}{\partial p_2} + \cdots + k_n \dfrac{\partial a_{2n}}{\partial p_n}.
\end{array}\right\} \qquad (10)$$

Imaginons $q_1, q_2, \ldots q_n$ exprimées en fonction de $a_1, \ldots a_{2n}, t$, et différentions ces expressions par rapport à $p_1, \ldots p_n$, nous aurons, pour chaque q_i les n équations :

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial q_i}{\partial a_1} \dfrac{\partial a_1}{\partial p_1} + \dfrac{\partial q_i}{\partial a_2} \dfrac{\partial a_2}{\partial p_1} + \cdots + \dfrac{\partial q_i}{\partial a_{2n}} \dfrac{\partial a_{2n}}{\partial p_1} = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dfrac{\partial q_i}{\partial a_1} \dfrac{\partial a_1}{\partial p_n} + \dfrac{\partial q_i}{\partial a_2} \dfrac{\partial a_2}{\partial p_n} + \cdots + \dfrac{\partial q_i}{\partial a_{2n}} \dfrac{\partial a_{2n}}{\partial p_n} = 0.
\end{array}\right\} \qquad (11)$$

Multipliant les équations (11) respectivement par $\frac{\partial q_i}{\partial a_1}, \frac{\partial q_i}{\partial a_2}, \ldots \frac{\partial q_i}{\partial a_{2n}}$, et ajoutant, en ayant égard aux équations (10), il vient :

$$F_1 \frac{\partial q_i}{\partial a_1} + F_2 \frac{\partial q_i}{\partial a_2} + \cdots + F_{2n} \frac{\partial q_i}{\partial a_{2n}} = 0. \qquad (12)$$

Or, si, comme on le suppose, $F_1, F_2, \ldots F_{2n}$ sont des fonctions de $a_1, a_2, \ldots a_{2n}$ seulement, ne renfermant pas t, on obtient,

en différentiant la dernière équation par rapport à t, et faisant $i = 1, 2, \ldots n$, les $2n$ équations suivantes :

$$F_1 \frac{\partial q_1}{\partial a_1} + F_2 \frac{\partial q_1}{\partial a_2} + \cdots + F_{2n} \frac{\partial q_1}{\partial a_{2n}} = 0,$$

$$F_1 \frac{\partial q_2}{\partial a_1} + F_2 \frac{\partial q_2}{\partial a_2} + \cdots + F_{2n} \frac{\partial q_2}{\partial a_{2n}} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_1 \frac{\partial q_n}{\partial a_1} + F_2 \frac{\partial q_n}{\partial a_2} + \cdots + F_{2n} \frac{\partial q_n}{\partial a_{2n}} = 0,$$

$$F_1 \frac{\partial q'_1}{\partial a_1} + F_2 \frac{\partial q'_1}{\partial a_2} + \cdots + F_{2n} \frac{\partial q'_1}{\partial a_{2n}} = 0,$$

$$F_1 \frac{\partial q'_2}{\partial a_1} + F_2 \frac{\partial q'_2}{\partial a_2} + \cdots + F_{2n} \frac{\partial q'_2}{\partial a_{2n}} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_1 \frac{\partial q'_n}{\partial a_1} + F_2 \frac{\partial q'_n}{\partial a_2} + \cdots + F_{2n} \frac{\partial q'_n}{\partial a_{2n}} = 0.$$

Mais, de ces $2n$ équations il résulte : ou bien que les F_i doivent être nuls séparément, ou bien que le déterminant des coefficients est nul.

Or, si ce déterminant est nul, il existe (n° **50**) entre les quantités q_i, q'_i et t une relation ne renfermant pas les a_i; mais une telle équation serait une intégrale du problème non troublé, sans constante arbitraire, ce qui est impossible.

On doit donc avoir :

$$F_1 = F_2 = \cdots = F_{2n} = 0,$$

ou bien :

$$A_1 = B_1, \quad A_2 = B_2, \quad \ldots A_{2n} = B_{2n},$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

XXIV.

Formules de perturbations pour le mouvement d'une planète.

178. Considérons un système matériel soumis à des forces données, et supposons que l'on ait formé les équations différentielles et les intégrales du mouvement.

Si, à un instant quelconque du mouvement, des forces d'impulsion viennent à agir sur le système, après cet instant, les équations différentielles du mouvement seront encore les mêmes: les valeurs des constantes d'intégration seules auront changé dans les intégrales.

Pour obtenir les valeurs nouvelles des constantes, il faudra calculer la vitesse de chaque point provenant des impulsions, et, d'après les positions de ces points à l'instant où ces impulsions agissent, et leurs vitesses modifiées par les impulsions, on pourra déterminer les valeurs nouvelles des constantes arbitraires.

Si un système matériel est sollicité par des forces perturbatrices, on peut imaginer que l'on remplace ces forces perturbatrices par des impulsions infiniment petites agissant pendant chaque instant.

Au commencement de chaque instant, les positions des points seront les mêmes que s'il n'y avait pas d'impulsions pendant cet instant, les vitesses seront aussi les mêmes, les accélérations seules seront changées. Les constantes arbitraires varient de quantités infiniment petites à la fin de chaque instant, et, par conséquent, deviennent des quantités variables.

On conclut de là que les formules qui donnent les positions des points matériels, et les composantes de leurs vitesses resteront les mêmes que s'il n'y avait pas de forces perturbatrices; mais, les constantes arbitraires contenues dans ces formules seront changées en quantités variables.

Dans le cas d'un point matériel attiré par un centre fixe, et

soumis à d'autres forces perturbatrices, les éléments de l'orbite qui formaient les constantes arbitraires du problème deviendront variables.

A chaque instant l'ellipse variable aura pour foyer le centre d'attraction, elle passera par le point attiré et sera tangente à la trajectoire du point matériel.

179. Supposons donc que le point matériel soit non seulement sollicité par le centre fixe, mais encore par d'autres actions, et que la fonction de force soit augmentée de $-\Omega$; nous aurons pour les équations différentielles du mouvement troublé :

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{f\mu x}{r^3}+\frac{\partial\Omega}{\partial x}=0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{f\mu y}{r^3}+\frac{\partial\Omega}{\partial y}=0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{f\mu z}{r^3}+\frac{\partial\Omega}{\partial z}=0.$$

Les équations du mouvement non troublé ont été mises sous la forme (n° **63**) :

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H_1}{\partial x'},\quad \frac{dx'}{dt}=-\frac{\partial H_1}{\partial x},$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\partial H_1}{\partial y'},\quad \frac{dy'}{dt}=-\frac{\partial H_1}{\partial y},$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial H_1}{\partial z'},\quad \frac{dz'}{dt}=-\frac{\partial H_1}{\partial z},$$

dans lesquelles nous avons posé :

$$H_1=T-U,$$

U étant la fonction de force $\frac{f\mu}{r}$, et T la demi-force vive du point matériel.

Les équations du mouvement troublé pourront être mises

sous la même forme que celles du mouvement non troublé, pourvu que la fonction de force U soit augmentée de $-\Omega$. Si nous posons alors :

$$H = T - U + \Omega = H_1 + \Omega,$$

les équations du mouvement troublé seront :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x'}, \quad \frac{dx'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y'}, \quad \frac{dy'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y},$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial H}{\partial z'}, \quad \frac{dz'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z}.$$

Si nous considérons les équations du mouvement non troublé, nous avons vu qu'en désignant par S la solution complète de l'équation différentielle partielle de laquelle dépend la solution du problème, et par h, b, g les trois constantes arbitraires renfermées dans S, les intégrales du mouvement seront données par les trois équations :

$$\frac{\partial S}{\partial h} = t + \tau, \quad \frac{\partial S}{\partial g} = \frac{\pi}{2} + \alpha, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = \frac{\pi}{2} - \beta,$$

τ, α, β étant trois autres constantes arbitraires.

Comme nous l'avons vu (n° 63), h est la constante des forces vives, b l'axe du plan invariable, g la projection de cet axe sur la normale au plan fixe sur lequel on compte les longitudes, α la longitude du nœud de la planète, β la distance angulaire du périhélie au nœud, $-\tau$ le temps du passage de la planète au périhélie.

Dans le cas du mouvement troublé, les intégrales auront la même forme que pour le mouvement non troublé, mais on devra considérer comme variables les six éléments h, g, b, α, β, τ.

D'après la théorie générale, les valeurs de ces quantités seront données par les formules suivantes :

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\tau}, \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial h},$$

$$\frac{dg}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}, \quad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial g},$$

$$\frac{db}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}, \quad \frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial b}.$$

180. On peut remplacer les six équations précédentes par l'équation :

$$\delta\Omega = -\frac{dh}{dt}\delta\tau - \frac{dg}{dt}\delta\alpha - \frac{db}{dt}\delta\beta + \frac{d\tau}{dt}\delta h + \frac{d\alpha}{dt}\delta g + \frac{d\beta}{dt}\delta b.$$

Or, en désignant par f l'attraction de l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance, par $2a$ le grand axe de l'orbite, par e l'excentricité et i l'inclinaison de l'orbite sur le plan fixe, on a :

$$h = -\frac{f\mu}{2a}, \quad b = \sqrt{f\mu a(1-e^2)}, \quad g = b\cos i.$$

Nous allons substituer aux quantités h, b, g, les quantités a, e, i. En différentiant les formules précédentes, on a :

$$dh = \frac{f\mu}{2a^2}da,$$

$$db = \frac{f\mu}{2b}\left\{(1-e^2)da - 2aede\right\},$$

$$dg = \frac{f\mu}{2b}\left\{(1-e^2)\cos i\,da - 2ae\cos i\,de\right\} - b\sin i\,di.$$

On en déduit trois équations analogues en remplaçant la caractéristique d par δ. Cela posé, remplaçons dans l'expression de $\delta\Omega$ les quantités :

$$dh,\ db,\ dg,\ \delta h,\ \delta b \text{ et } \delta g,$$

par ces valeurs, nous aurons :

$$\delta\Omega = -\frac{f\mu}{2a^2}\frac{da}{dt}\delta\tau - \frac{f\mu}{2b}\left\{(1-e^2)\cos i\frac{da}{dt} - 2ae\cos i\frac{de}{dt}\right\}\delta\alpha$$

$$+ b\sin i\frac{di}{dt}\delta\alpha - \frac{f\mu}{2b}\left\{(1-e^2)\frac{da}{dt} - 2ae\frac{de}{dt}\right\}\delta\beta$$

$$+\frac{d\tau}{dt}\cdot\frac{f\mu}{2a^2}\delta a + \frac{d\alpha}{dt}\left[\frac{f\mu}{2b}\cos i\{(1-e^2)\delta a - 2ae\delta e\} - b\sin i\,\delta i\right]$$

$$+\frac{d\beta}{dt}\cdot\frac{f\mu}{2b}\{(1-e^2)\delta a - 2ae\delta e\}.$$

Mais, on a aussi, Ω étant exprimé en fonction des quantités $a, e, i, \tau, \alpha, \beta$:

$$\delta\Omega = \frac{\partial\Omega}{\partial a}\delta a + \frac{\partial\Omega}{\partial e}\delta e + \frac{\partial\Omega}{\partial i}\delta i + \frac{\partial\Omega}{\partial\tau}\delta\tau + \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\delta\alpha + \frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\delta\beta.$$

En égalant les coefficients des variations δa, δe, ... dans les seconds membres, on a les équations suivantes :

$$\frac{\partial\Omega}{\partial a} = \frac{f\mu}{2a^2}\frac{d\tau}{dt} + \frac{f\mu}{2b}(1-e^2)\cos i\frac{d\alpha}{dt} + \frac{f\mu}{2b}(1-e^2)\frac{d\beta}{dt}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial e} = -\frac{f\mu ae}{b}\cos i\frac{d\alpha}{dt} - \frac{f\mu ae}{b}\frac{d\beta}{dt}, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial i} = -b\sin i\frac{d\alpha}{dt}, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\tau} = -\frac{f\mu}{2a^2}\frac{da}{dt}, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha} = b\sin i\frac{di}{dt} - \frac{f\mu}{2b}(1-e^2)\cos i\frac{da}{dt} + \frac{f\mu ae}{b}\cos i\frac{de}{dt}, \qquad (5)$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\beta} = -\frac{f\mu}{2b}(1-e^2)\frac{da}{dt} + \frac{f\mu ae}{b}\frac{de}{dt}. \qquad (6)$$

On en tire :

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2a^2}{f\mu}\frac{\partial\Omega}{\partial\tau}, \tag{7}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{f\mu a(1-e^2)}\sin i}\frac{\partial\Omega}{\partial i}, \tag{8}$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{a(1-e^2)}{f\mu e}\frac{\partial\Omega}{\partial\tau} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{f\mu a}\,.\,e}\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}, \tag{9}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{\sqrt{f\mu a(1-e^2)}\sin i}\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha} - \frac{\cos i}{\sqrt{f\mu a(1-e^2)}\sin i}\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}, \tag{10}$$

$$\frac{d\beta}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{f\mu a}\,.\,e}\frac{\partial\Omega}{\partial e} + \frac{\cos i}{\sqrt{f\mu a(1-e^2)}\sin i}\frac{\partial\Omega}{\partial i}, \tag{11}$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{2a^2}{f\mu}\frac{\partial\Omega}{\partial a} + \frac{a(1-e^2)}{f\mu e}\frac{\partial\Omega}{\partial e}. \tag{12}$$

Les éléments a, e, i, α, β et τ étant supposés varier très peu, si on les regarde comme constants dans les seconds membres de ces dernières équations, et si l'on considère t, qui entre dans Ω, comme seule variable, on pourra calculer ces quantités avec une grande approximation pendant un temps assez considérable à l'aide des quadratures indiquées dans ces équations.

181. On peut remplacer la dernière formule (12), qui donne τ, par une autre d'une grande utilité. A cet effet, on remplacera la quantité τ par l'*anomalie moyenne :*

$$\lambda = n(t + \tau),$$

dans laquelle :

$$n = \sqrt{f\mu}\,.\,a^{-\frac{3}{2}}.$$

Observons que τ n'entre dans Ω que par λ qui le renferme.

Or, si l'on remplace τ par λ, a entrera dans Ω par n qui le renferme, et nous aurons :

$$\delta\Omega = \frac{\partial\Omega}{\partial a}\delta a + \frac{\partial\Omega}{\partial e}\delta e + \frac{\partial\Omega}{\partial i}\delta i + \frac{\partial\Omega}{\partial\tau}\delta\tau + \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\delta\alpha + \frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\delta\beta$$

$$= \left(\frac{\partial\Omega}{\partial a}\right)\delta a + \frac{\partial\Omega}{\partial e}\delta e + \frac{\partial\Omega}{\partial i}\delta i + \frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}\delta\lambda + \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\delta\alpha + \frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\delta\beta.$$

Nous désignons par $\left(\frac{\partial\Omega}{\partial a}\right)$ la dérivée de Ω par rapport à a, en supposant constant λ, qui renferme a.

Or, de la formule :

$$\lambda = n(t + \tau),$$

on tire :

$$\delta\lambda = n\delta\tau + (t + \tau)\delta n$$

$$= n\delta\tau + (t + \tau)\frac{\partial n}{\partial a}\delta a.$$

D'où, en remplaçant $\delta\lambda$ dans l'équation précédente, et égalant les coefficients de δa et $\delta\tau$ dans les deux membres, il vient :

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\tau} = n\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda},$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial a} = \left(\frac{\partial\Omega}{\partial a}\right) + (t + \tau)\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}\frac{\partial n}{\partial a};$$

mais, d'autre part, on a :

$$\frac{d\lambda}{dt} = n + n\frac{d\tau}{dt} + (t + \tau)\frac{\partial n}{\partial a}\frac{da}{dt}.$$

Des formules précédentes, il résulte que l'on a :

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2a^2}{f\mu}\frac{\partial\Omega}{\partial\tau} = -\frac{2a^2 n}{f\mu}\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}, \qquad (13)$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{2a^2}{f\mu}\frac{\partial\Omega}{\partial a} + \frac{a(1 - e^2)}{f\mu e}\frac{\partial\Omega}{\partial e}$$

$$= \frac{2a^2}{f\mu}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial a}\right) + \frac{2a^2}{f\mu}(t + \tau)\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}\frac{\partial n}{\partial a} + \frac{a(1 - e^2)}{f\mu e}\frac{\partial\Omega}{\partial e};$$